A propos d'un exemple simple d'équation stochastique sans solution forte.

Septembre 1989.

1. Les Notes qui suivent constituent une reprise, dans un cas particulier, de l'étude suivante, commencée il y a maintenant 2 ans, en collaboration avec T. Jeulin

Soit $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne telle que :

$$(1) \quad \text{pour tous } 0<\varepsilon<N<\infty, \quad \int_\varepsilon^N du\, |\varphi(u)| < \infty ;$$

soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré usuel, et $(\gamma_t, t\geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0.

L'objet principal de cette étude générale était de déterminer si l'équation :

$$(2) \qquad X_t = \gamma_t + \int_0^t du\, \varphi(u) X_u \qquad (t \geq 0)$$

admet une solution forte, ce qui signifie ici que :

il existe un processus (X_t) $(\mathcal{F}_t)$ adapté qui satisfait (2), et tel que :

$$(3) \quad \text{pour tout } t>0, \quad \int_0^t du\, |\varphi(u)|\,|X_u| < \infty, \quad P\ p.s.$$

Dans tout ce qui suit, je considère le cas particulier où $\varphi(u) = 1/u$, cas particulier qui était à l'origine de notre étude, comme je le rappelle dans le paragraphe qui suit.

2. En effet, nous nous étions intéressés à l'équation

$$(4) \qquad X_t = \gamma_t + \int_0^t \frac{du}{u} X_u$$

à propos du grossissement initial de la filtration du mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ issu de 0, au moyen de la tribu engendrée par la variable B_1.

La formule de grossissement (c'est à dire : la décomposition canonique de B dans cette nouvelle filtration) est alors :

$$(5) \qquad B_t = \beta_t + \int_0^{t\wedge 1} ds \left(\frac{B_1 - B_s}{1-s} \right) . \qquad (t \geq 0) ,$$

où $(\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien dans la filtration grossie.

Retournons maintenant les processus B et β au temps 1, c'est à dire, considérons : $\hat{B}_t \equiv B_1 - B_{1-t}$ et $\hat{\beta}_t \equiv \beta_1 - \beta_{1-t}$ $(t \leq 1)$.

On obtient, d'après (5) :

$$(6) \qquad \hat{B}_t = \hat{\beta}_t + \int_0^t \frac{ds}{s} \hat{B}_s \qquad (t \leq 1) ,$$

c'est à dire que, si l'on pose : $\gamma_t = \hat{\beta}_t$, le processus $X_t \equiv \hat{B}_t$ $(t \leq 1)$ est solution de (4).

3. Changeons légèrement de point de vue ; partant de (6), il nous semble naturel d'associer à un mouvement brownien $(X_t, t \geq 0)$, issu de 0, le processus gaussien :

$$(7) \qquad \gamma_t = X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s \qquad (t \geq 0) .$$

L'espace vectoriel engendré par ce nouveau processus gaussien est contenu dans l'espace gaussien engendré par $(X_t, t\geq 0)$, ce qui permet de montrer aisément les résultats suivants.

Proposition 1 : 1) Le processus $(\gamma_t ; t\geq 0)$ est un mouvement brownien standard ;
2) Pour tout $t>0$, la variable X_t est indépendante de $\mathcal{G}_t = \sigma\{\gamma_s ; s\leq t\}$.
3) Si l'on pose $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s ; s\leq t\}$, on a, pour tout $\varepsilon < t$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_\varepsilon \vee \mathcal{G}_t$ P p.s.
Néanmoins, $\mathcal{G}_t \not\subseteq \mathcal{F}_t$; plus précisément, on a : $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma(X_t)$.
Enfin, on a : $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$, P p.s.

Démonstration : a) On peut démontrer les deux premières assertions de façon tout à fait élémentaire en montrant les relations :

$$E[\gamma_s \gamma_t] = s \quad \text{et} \quad E[\gamma_s X_t] = 0 \quad , \text{ si } s\leq t.$$

b) Cependant, la remarque suivante est beaucoup plus éclairante : il est immédiat de montrer, à partir de (7), que pour $0<s<t<\infty$, on a :

$$(8) \qquad \frac{X_t}{t} = \frac{X_s}{s} + \int_s^t \frac{d\gamma_u}{u} .$$

En fixant s, et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient :

$$(9) \qquad \frac{X_s}{s} = -\int_s^\infty \frac{d\gamma_u}{u}$$

Cette dernière formule (9) nous donne immédiatement une seconde preuve de l'assertion (2), ainsi que l'égalité : $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$, P p.s.
Finalement, les deux premières affirmations de 3) découlent de l'identité (8) □

Remarques : 1) Le couple de filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ fournit un exemple supplémentaire de situation dans laquelle, bien que l'on ait :
$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_\varepsilon \vee \mathcal{G}_t \qquad (0<\varepsilon<t),$$
et donc :
$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} (\mathcal{F}_\varepsilon \vee \mathcal{G}_t),$$
on ne peut pas en déduire : $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$, P p.s., alors que la tribu $\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon$ est P-triviale, d'après la loi du 0-1 de Blumenthal.

L'équation de Tsirel'son (voir, par exemple, Stroock-Yor [ ], Yor [ ]) fournit d'autres exemples de telle situation.

2) D'après l'étude générale de l'équation (2) faite avec T. Jeulin, on a, dans le cas particulier où $\varphi(u) = 1/u$, les résultats suivants :

- toutes les solutions de l'équation (4) sont données par :
$$X_t = t\left(C - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u}\right)$$
où C est une variable aléatoire ; aucune de ces solutions n'est forte ;
- en conséquence, $(X_t, t\geq 0)$ solution de (4) est un mouvement brownien, si, et seulement si : $C = 0$.

(Utiliser le fait que, pour un mouvement brownien $(B_t, t\geq 0)$, on a : $\frac{B_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 0$) $\square$

4. Il ressort en particulier de la Proposition 1 que la transformation T suivante, définie sur le mouvement brownien $(X_t, t\geq 0)$:
$$T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s \qquad (t\geq 0)$$
préserve la mesure de Wiener.

Il est naturel de se demander si cette transformation est ergodique. Nous ne savons pas répondre complètement à cette question ; toutefois, nous pouvons montrer la

Proposition 2 : Soit $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s ; s \leq t\}$. Alors, pour tout $t > 0$; la tribu : $\bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_t)$ est P-triviale.

Cependant, pour $t = \infty$, on a, pour tout n :

(10) $$(T^n)^{-1}(\mathcal{F}_\infty) = \mathcal{F}_\infty \quad P\text{ p.s.}$$

Remarque : Il résulte en particulier de cette Proposition 2 que la transformation T considérée comme laissant invariante la mesure de Wiener sur $C([0,t], \mathbb{R})$, pour $t > 0$ fixé, est ergodique sur cet espace. Cependant, nous ne savons rien dire a priori sur l'ergodicité de T considérée comme transformation de $C([0,\infty), \mathbb{R})$ dans lui-même, laissant invariante la mesure de Wiener □

L'égalité (10) découle immédiatement de l'égalité dans le cas $n = 1$, déjà obtenue sous une forme légèrement différente à la fin de la Proposition 1.
La première partie de la Proposition 2 découlera du résultat suivant de représentation du mouvement brownien standard, à l'aide des polynômes de Laguerre, dont nous rappelons la définition et la caractérisation :
la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynomes de Laguerre :

(11) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k!} (-x)^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

est la suite des polynômes orthonormaux pour la mesure $e^{-x} dx$ sur $\mathbb{R}_+$.
(Voir, par exemple, Lebedev, p.)

Théorème : Soit $(X_t;\, 0 \leq t \leq 1)$ mouvement brownien réel issu de 0.

Posons : $\Theta_n = T^n(X)_1$, où $T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s$.

Alors, on a : $$\Theta_n = \int_0^1 dX_s \, L_n\left(\log \frac{1}{s}\right);$$

$(\Theta_n,\, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables gaussiennes, centrées, réduites ; de plus, on a :

(12) $$X_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n\left(\log \frac{1}{t}\right) \Theta_n, \qquad t \leq 1,$$

où $$c_n(a) = \int_a^\infty dx\, e^{-x} L_n(x).$$

Démonstration du Théorème : 1) Itérons la transformation T. Il vient :

$$T^2(X)_t = T(X)_t - \int_0^t \frac{du}{u} T(X)_u$$
$$= X_t - 2\int_0^t \frac{du}{u} X_u + \int_0^t \frac{du}{u} \int_0^u \frac{ds}{s} X_s ;$$
$$T^3(X)_t = T^2(X)_t - \int_0^t \frac{du}{u} T^2(X)_u$$
$$= X_t - 3\int_0^t \frac{du}{u} X_u + 3\int_0^t \frac{du}{u}\int_0^u \frac{ds}{s} X_s - \int_0^t \frac{du}{u}\int_0^u \frac{ds}{s}\int_0^s \frac{dv}{v} X_v,$$

et, par itération, on obtient, pour tout n :

$$T^n(X)_t = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^t \frac{du_1}{u_1} \cdots\cdots \int_0^{u_{k-1}} \frac{du_k}{u_k} X_{u_k}.$$

En écrivant maintenant : $X_{u_k} = \int_0^{u_k} dX_s$, il vient :

$$\int_0^t \frac{du_1}{u_1} \cdots\cdots \int_0^{u_{k-1}} \frac{du_k}{u_k} X_{u_k} = \int_0^t dX_s \frac{1}{k!} (\log t - \log s)^k ,$$

d'où l'on déduit, $$T^n(X)_t = \int_0^t dX_s \, L_n\left(\log \frac{t}{s}\right),$$

en utilisant la formule (11). On en déduit en particulier la représentation de G_n qui figure dans l'énoncé du Théorème.

2) Le fait que les variables G_n satisfassent : $E[G_n G_m] = \delta_{nm}$ peut maintenant être compris, soit comme une conséquence de l'assertion 2) de la Proposition 1), soit comme une conséquence du caractère orthonormal de la suite L_n dans l'espace $L^2(e^{-x}dx)$. En effet, on a, d'après 1) :

$$E[G_n G_m] = \int_0^1 ds \, L_n\left(\log \frac{1}{s}\right) L_m\left(\log \frac{1}{s}\right)$$
$$= \int_0^\infty dx \, e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \delta_{nm} .$$

3) Plus généralement, l'application :

$$(f(x), x > 0) \longrightarrow \left(f\left(\log \frac{1}{s}\right), 0 < s < 1\right)$$

constitue un isomorphisme d'espaces de Hilbert, entre $L^2(e^{-x}dx)$ et $L^2([0,1], ds)$. En conséquence, la suite des fonctions de s : $\left(L_n\left(\log \frac{1}{s}\right), 0 < s < 1\right)$ constitue une base orthonormée de $L^2([0,1], ds)$, et le développement (12) de $(X_t ; t \leq 1)$ le long de la suite des variables

$(\mathcal{G}_n ; n \in \mathbb{N})$ se ramène à celui de $1_{[0,t]}(s)$ dans la base $\left(L_n\left(\log \frac{1}{s}\right) ; n \in \mathbb{N}\right)$. $\square$

Démonstration de la Proposition 2 : Il suffit de montrer la trivialité de la tribu $\Phi \equiv \bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_1)$.

En travaillant avec l'espace gaussien engendré par $(X_t, t \leq 1)$, on voit que la tribu $(T^n)^{-1}(\mathcal{F}_1)$ est indépendante du vecteur $(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \cdots, \mathcal{G}_{n-1})$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que Φ est indépendante de toute la suite $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$ et donc, d'après le théorème, Φ est indépendante de $(X_t ; t \leq 1)$, c'est à dire de $\mathcal{F}_1$. En conséquence, Φ est P-triviale $\square$