A propos de l'inverse du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$.

M. Yor

1. Introduction ~~et énoncé principal~~

Dans tout ce travail, $(B_t,\ 0 \leq t < \infty)$ désigne un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, issu de $a \neq 0$.

Soit $S_n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure différentielle ordinaire. L. Schwartz [10] montre que $(B_t,\ t < \infty)$, considéré comme prenant ses valeurs dans S_n, est une semimartingale jusqu'en $t = \infty$; ainsi : " dans S_n, $n \geq 3$, B ressemble à un pont Brownien indexé par $t \in [0, \infty]$, issu de a en $t = 0$, et se terminant en ∞ $(\in S_n)$ au temps $t = \infty$".

L'objet principal de ce travail, résumé ~~principalement~~ dans le théorème ci-dessous, est de préciser cette phrase.

On se ramène à $\mathbb{R}^n$ en considérant l'inverse du mouvement Brownien, soit $(\Phi_2(B_t),\ 0 \leq t < \infty)$, avec $\Phi_2(x) = x/|x|^2$. On a le

Théorème :

Notons $A_t = \int_0^t ds/|B_s|^4$, $T_0 = A_\infty$ $(< \infty,\ P\ p.s.)$, et $\tau_t = \inf\{u : A_u > t\}$ $(t < T_0)$. Alors, la loi du processus $\{Y_t = \Phi_2(B_{\tau_t}),\ \text{si } t < T_0\ ;\ = 0,\ \text{si } t = T_0\}$ est caractérisée par :

(i) $P(T_0 \in dt) = \left(\frac{|b|^2}{2}\right)^\nu \left[\Gamma(\nu) t^{\nu+1}\right]^{-1} \exp\left(-\frac{|b|^2}{2t}\right) dt$, où $b = \Phi_2(a)$, et $\nu = \frac{n}{2} - 1$.

(ii) Conditionnellement à $T_0 = u$, le processus $(Y_t,\ t \leq u)$ est un pont Brownien pendant l'intervalle de temps $[0, u]$, issu de $b = \Phi_2(a)$ en $t = 0$, et valant 0 en $t = u$.

D'autres propriétés remarquables du processus $(\Phi_2(B_t),\ t \geq 0)$ sont rassemblées, avec ce théorème, dans le paragraphe 3.

On donne, au paragraphe 4, deux démonstrations du théorème, la première s'appuyant sur les h-processus de Doob ~~la théorie du grossissement d'une filtration~~, et la seconde sur le conditionnement par le dernier temps de passage en un point d'un processus de Bessel.

On étend, au paragraphe 5, le théorème dans deux directions en considérant les processus $\Phi_p(X_.)$, où $\Phi_p(x) = x/|x|^p$ $(p \neq 1)$, et (X_t) est solution de l'équation stochastique :

$$dX_t = dB_t + \lambda \frac{X_t\, dt}{|X_t|^2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{1.a}$$

Soulignons enfin que, au cours de cet article, certains champs de matrices introduits par N. Krylov [8] jouent un rôle important. La définition de ces champs est donnée au paragraphe 2 ; ils permettent aussi d'obtenir très simplement la décomposition en skew-product des processus vérifiant (1.a), et du mouvement Brownien en particulier, sans passer par la factorisation du Laplacien par l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère (voir Itô-Mc Kean [4], p. , pour cette approche).

2. Remarques sur certains champs de matrices.

$M_{n\times n}$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels. Pour tout $(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$, N. Krylov ([8], p. 21) introduit le champ de matrices :

$$\sigma^{\mu,\nu} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow M_{n\times n}$$

caractérisé par :

$$\sigma^{\mu,\nu}(x)\cdot x = \mu x \quad ; \quad \sigma^{\mu,\nu}(x)\cdot y = \nu y \quad , \text{ si } (x,y) = 0 \tag{2.a}$$

les coefficients de $\sigma^{\mu,\nu}(x)$ sont donc :

$$\sigma^{\mu,\nu}_{i,j}(x) = \nu\, \delta_{i,j} + (\mu-\nu)\frac{x_i x_j}{|x|^2} \tag{2.b}$$

La définition (2.a) entraîne immédiatement :

$$\sigma^{\mu,\nu}(x)\,\sigma^{\mu',\nu'}(x) = \sigma^{\mu\mu',\nu\nu'}(x), \tag{2.c}$$

pour tous couples (μ,ν) et (μ',ν').

En conséquence, si l'on pose :

$$\sigma^{(p)}(x) = \sigma^{1,\frac{1}{1-p}}(x) \qquad (p\neq 1), \tag{2.d}$$

on a :

$$(\sigma^{(p)}(x))^{-1} = \sigma^{(q)}(x), \quad \text{avec } \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1. \tag{2.e}$$

Notons encore la relation :

$$\mathrm{tr}(\sigma^{\mu,\nu}(x)) = \mu + (n-1)\nu. \tag{2.f}$$

Introduisons maintenant les fonctions :

$$\Phi_p(x) = x/|x|^p \quad (x \neq 0), \quad \text{et } h_r(x) = |x|^r \quad (x \neq 0),$$

et remarquons que la matrice de Jacobi associée à Φ_p, ~~soit~~ $\cancel{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_p)_i(x)\right)}$ et la matrice Hessienne associée à h_r, ~~est~~ s'expriment en fonction de certaines matrices $\sigma^{\mu,\nu}$. De façon précise :

$$(2\text{-}g) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_p)_i(x)\right) = \frac{1}{|x|^p}\sigma^{1-p,1}(x) \; ; \; \left(\frac{\partial^2 h_r(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = |x|^{r-2}\sigma^{r(r-1),r}(x).$$

3. Enoncés des principaux résultats.

Dans tout ce paragraphe, (B_t) désigne un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, issu de $a \neq 0$.

On a rassemblé ici quelques propriétés remarquables de l'inverse du mouvement Brownien, soit $\Phi_2(B_t) = B_t/|B_t|^2$ $(t \geq 0)$.

Pour simplifier l'écriture, on note simplement Φ pour Φ_2.

L'inversion étant bijective sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on obtient facilement la

Proposition A : L'inverse du mouvement Brownien $(\Phi(B_t), t \geq 0)$ est une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, qui admet pour semi-groupe :

$$Q_t(x; dy) = \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t|x|^2|y|^2}\right)\frac{dy}{(2\pi t)^{n/2}|y|^{2n}}.$$

D'autre part, $(\Phi(B_t), t \geq 0)$ est une semimartingale (dans la filtration Brownienne), qui a pour décomposition canonique :

$$(3\text{-}a) \quad \Phi(B_t) = \Phi(B_0) - \int_0^t \frac{1}{|B_s|^2}\sigma^{(2)}(B_s)\cdot dB_s - (n-2)\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}\Phi(B_s)$$

$$(3\text{-}a') \quad = \Phi(B_0) + \int_0^t \frac{1}{|B_s|^2}d\hat{B}_s - (n-2)\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}\Phi(B_s)$$

où $\hat{B}_t \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t \sigma^{(2)}(B_s)\,dB_s$ est un nouveau mouvement Brownien (d'après (2-e), $\sigma^{(2)}(x)$ est sa propre inverse). La formule (3·a) résulte de (2·g), et de ce que : $\Delta\Phi(x) = -2(n-2)\dfrac{\Phi(x)}{|x|^2}$.

On déduit de (3.a') que, si l'on fait subir au processus $(\Phi(B_t), t \geq 0)$ le changement de temps $(\sigma_h, h < H_\infty)$, inverse de $H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^4}$, le processus $(Y_t = \Phi(B_{\sigma_t}), t < H_\infty ; = 0, \text{si } t = H_\infty)$ satisfait :

$$(3.b) \qquad Y_t = Y_0 + \beta_t - (n-2)\int_0^t ds \frac{Y_s}{|Y_s|^2} \qquad (t < H_\infty),$$

où (β_t) désigne un nouveau mouvement Brownien (arrêté en H_∞), et $H_\infty = \inf\{t : Y_t = 0\}$. Par souci de clarté, on écrit désormais T_0 pour H_∞. Les deux énoncés suivants découlent, pour l'essentiel, de l'identité (3.b).

Proposition B : Le processus $(Y_t, t < T_0)$ est une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dont le générateur infinitésimal restreint aux fonctions de $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, coïncide avec l'opérateur : $\frac{1}{2}\Delta f - (n-2)\left(\frac{y}{|y|^2}, \nabla f\right)$ c'est le h-processus de Doob associé au mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^n$, avec $h(x) \equiv h_{2-n}(x) = 1/|x|^{n-2}$.

Théorème C : La loi de $(Y_t, t \leq T_0)$ peut être caractérisée comme suit :

(i) $P(T_0 \in dt) = \left[\Gamma(\nu)(2|a|^2)^\nu t^{\nu+1}\right]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2t|a|^2}\right) dt$, où $\nu = \frac{n}{2} - 1$

(ii) Conditionnellement à $T_0 = u$, le processus $(Y_t, t \leq u)$ est un pont Brownien pendant l'intervalle de temps $[0,u]$, issu de $a/|a|^2$ en $t = 0$, et valant 0 en $t = u$.

Remarque 1 : En dimension $n = 2$, on a $H_\infty = \infty$ p.s, et le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien. Plus généralement, en [1], les auteurs étudient les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telles que $(f(B_t), t \geq 0)$ soit, à un changement de temps près, un mouvement Brownien.

4. Démonstrations des résultats principaux.

Les parties A, B, C de ce paragraphe correspondent aux énoncés A, B, C. On donne deux démonstrations (C.1) et (C.2) du théorème C.

A) L'inversion étant bijective sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le semi-groupe $Q_t(x; dy)$ est donné par :

$$Q_t(x; dy) = p_t\left(\Phi(x), \Phi(y)\right) \gamma(y)\, dy,$$

avec $p_t(u,v)$ la densité Brownienne, et $\gamma(y)$ le Jacobien de Φ.

On a donc : $Q_t(x, dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2t} \frac{|x-y|^2}{|x|^2 |y|^2}\right) \gamma(y)\, dy$

On montre ensuite aisément la formule : $\gamma(y) = 1/|y|^{2n}$, en utilisant la propriété d'involution de Φ, soit : $\Phi(\Phi(x)) = x$.

B) La première partie de l'énoncé découle immédiatement de la décomposition (3.b). Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que,

si $Lf = \frac{1}{2} \Delta f - (n-2) \left(\frac{y}{|y|^2} ; \nabla f\right)$ $\qquad (f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$

alors : $Lf(x) = \frac{1}{2h(x)} \Delta (fh)(x)$.

[Esquisse]

C.1) Les deux parties du théorème découlent aisément de la proposition B, et de la relation d'absolue continuité entre un processus de Markov (X_t), et son h-processus :

$$E_x^h [F_t ; t < T_0] = \frac{1}{h(x)} E_x [F_t\, h(X_t)],$$

relation satisfaite pour toute v.a. $F_t \geq 0$ mesurable par rapport à la tribu du passé de X jusqu'en t, convenablement complétée.

[détaillée]

(C.2) 1) Remarquons tout d'abord, par une nouvelle application de la formule d'Itô à partir de (3.b) que le processus $R_t = |Y_t|$ $(t \le T_0)$ satisfait :

(4.a) $$R_t = R_0 + \gamma_t + \frac{(4-n)-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s},$$

où $(\gamma_t, t \le T_0)$ désigne un mouvement Brownien réel (arrêté en T_0) défini par:

(4.b) $$\gamma_t = \int_0^t \frac{1}{|Y_s|}\left(\sum_{i=1}^n Y_s^i \, d\beta_s^i\right) \qquad (t \le T_0)$$

Le processus $(R_t, t \le T_0)$ est donc, d'après (4.a), un processus de Bessel de "dimension" $(4-n)$, issu de R_0, et considéré jusqu'à son premier temps d'atteinte de 0.

2) Rappelons maintenant l'application aux processus de Bessel (cf: Getoor-Sharpe [3]) d'un résultat général de retournement du temps obtenu par M. Sharpe [11]:

Si P_r^ν désigne la loi du processus de Bessel d'indice ν (correspondant à la dimension $d_\nu = 2(\nu+1)$) issu de r, on a, pour $\nu > 0$ et $r > 0$:

(4.c) $$\left[(R_t, t \le T_0); P_r^{-\nu}\right] \overset{(d)}{=} \left[(R_{(L_r - t)}, t \le L_r); P_0^\nu\right]$$

où $T_0 = \inf\{t : R_t = 0\}$, et $L_r = \sup\{t : R_t = r\}$.

En particulier, on a :

(4.d) $$(T_0 ; P_r^{-\nu}) \overset{(d)}{=} (L_r, P_0^\nu)$$

D'autre part, on a, d'après Getoor [2]:

(4.e) $$P_0^\nu(L_r \in dt) = \left(\frac{r^2}{2}\right)^\nu \left[\Gamma(\nu)\, t^{\nu+1}\right]^{-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) dt$$

L'assertion (i) du théorème découle alors de (4.d) et (4.e), car, si ν est l'indice associé à la dimension n, la dimension $d_{-\nu} = 2(-\nu+1)$ est précisément $(4-n)$, c'est à dire la dimension du processus de Bessel considéré en (4.a).

3) Notre seconde démonstration de la partie (ii) du théorème repose sur la remarque suivante :

soit $(B_t, t \ge 0)$ mouvement Brownien issu de $b = a/|a|^2$; (Y_t) a toujours la même signification. Nous montrerons ci-dessous que ces deux processus peuvent être décomposés en skew-product :

(4.f) $$Z_t = |Z_t|\,\theta\left(\int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}\right),$$

(remplacer Z par X)

où $\theta(\cdot)$ désigne un mouvement Brownien standard sur la sphère S_n, indépendant de $|X|$. Ainsi, pour montrer que :

(4.g) $(Y_u, u \leq T_0)$, conditionné par $T_0 \equiv \inf\{u : Y_u = 0\} = t$, a même loi que $(B_u, u \leq t)$, conditionné par $B_t = 0$,

il suffit de montrer cette identité en loi pour les parties radiales.

4) On a déjà remarqué que ces parties radiales sont deux processus de Bessel, ayant pour indices respectifs $-\nu$, et $\nu = \frac{n}{2} - 1$.

On a alors, à l'aide de (4.c) :

pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et tous réels $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$:

$$E_r^{-\nu}\left[f(R_{t_1}, \dots, R_{t_m}) \mid T_0 = t \right] = E_0^{\nu}\left[f(R_{t-t_1}, \dots, R_{t-t_m}) \mid L_r = t \right]$$

$$\overset{(4.h)}{=} E_0^{\nu}\left[f(R_{t-t_1}, \dots, R_{t-t_m}) \mid R_t = r \right]$$

$$\overset{(4.i)}{=} E_r^{\nu}\left[f(R_{t_1}, \dots, R_{t_m}) \mid R_t = 0 \right]$$

ce qui entraîne (4.g) à l'aide des arguments ci-dessus.

(4.h) découle aisément de ce que la projection duale prévisible de $(1_{(L_r \leq t)} ; t \geq 0)$ est proportionnelle au temps local en r du processus (R_t) [cf : Pitman-Yor [9], section , et Jeulin-Yor [6],].

(4.i) découle des propriétés de symétrie du semi-groupe du processus de Bessel (R_t).

5) Il reste à démontrer la décomposition en skew-product (4.f).

Nous montrons en fait qu'une telle décomposition a lieu pour tout processus (X_t) défini comme solution de :

$$X_t = X_0 + B_t + \lambda \int_0^t ds \frac{X_s}{|X_s|^2} \quad ; \; X_0 = b \neq 0$$

jusqu'en son premier temps d'atteinte de 0 ((B_t) désigne ici un mouvement Brownien issu de 0).

Remarquons que $(|X_t|)$ est un processus de Bessel de dimension $(1+2\lambda)$. Désormais, pour simplifier la démonstration, on suppose $\lambda \geq \frac{1}{2}$, et donc (X_t) est défini sur tout $\mathbb{R}_+$

(~~de~~ dans le cas général, il faudrait, au cours de la démonstration, compléter ~~construire~~ les mouvements Browniens arrêtés en T_0, en se plaçant sur des espaces plus gros...).

Par application de la formule d'Itô, d'une part à $(|X_t|)$, et d'autre part à $\varphi_t \equiv X_t / |X_t|$, on démontre :

a) que $(|X_t|)$ est adapté à la filtration du mouvement Brownien $\gamma_t \equiv \int_0^t (\varphi_s, dB_s)$

b) que (φ_t) satisfait l'équation stochastique :

$$\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t \frac{1}{|X_s|} \sigma^{0,1}(\varphi_s) \cdot dB_s - \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2} \varphi_s .$$

On peut remplacer ici le mouvement Brownien (B_t) par un nouveau mouvement Brownien :

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \left(\sigma^{0,1}(\varphi_s) \cdot dB_s + \sigma^{1,0}(\varphi_s) \cdot du_s \right),$$

où (u_t) est un mouvement Brownien indépendant de (B_t).

Alors, les mouvements Browniens (γ_t) et $(\tilde{B}_t)$ sont indépendants, et d'après le théorème de Knight sur les martingales orthogonales [7], (γ_t) est donc indépendant du mouvement Brownien $(\hat{B}_t)$ obtenu par changement de temps de $\left(\int_0^t \frac{1}{|X_s|} d\tilde{B}_s\right)$ avec l'inverse de $\int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2}$. Enfin, le processus (θ_t) obtenu à partir de (φ_t) par le même changement de temps satisfait :

$$(4.j) \qquad \theta_t = \theta_0 + \int_0^t \sigma^{0,1}(\theta_s) \cdot d\hat{B}_s - \frac{n-1}{2} \int_0^t ds\, \theta_s ,$$

et est donc mesurable par rapport à $\hat{B}$, ce qui termine la démonstration de (4.f).

(On admet que l'équation (4.j) définit bien le mouvement Brownien standard sur la sphère).

Remarque 2 : On peut encore donner une troisième démonstration de la partie (ii) du théorème en grossissant la filtration naturelle du processus (Y_t) défini en (3.b) avec la variable T_0 (voir Jeulin [5]).

On montre alors qu'il existe un mouvement Brownien n-dimensionnel $(\tilde{\beta}_t)$, indépendant de T_0, tel que : $Y_t = Y_0 + \tilde{\beta}_t - \int_0^t ds \frac{Y_s}{T_0 - s} \quad (t < T_0)$.

Conditionnellement à $T_0 = u$, $(Y_t, t \le u)$ satisfait donc l'équation stochastique du pont Brownien pendant l'intervalle de temps $[0,u]$, issu de $\Phi(a)$ en $t=0$, et valant 0 en $t=u$: l'assertion (ii) est démontrée.

5. Généralisations

(5.1) On étend les résultats du paragraphe 3 dans deux directions, en remplaçant d'une part le mouvement Brownien (B_t) par la solution (X_t) de l'équation

(5.a) $$X_t = X_0 + B_t + \lambda \int_0^t ds \, X_s / |X_s|^2 \quad ; \; X_0 = b \neq 0 ; \; B_0 = 0 ,$$

et la fonction $\Phi_2(x) \equiv x/|x|^2$ par $\Phi_p(x) = x/|x|^p$ $(p \neq 1)$.
A nouveau, pour simplifier l'écriture, on note quelque fois Φ pour Φ_p.
On a, à l'aide de la formule d'Itô:

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t \frac{1}{|X_s|^p} \sigma^{1-p,1}(X_s) \cdot dB_s + \frac{p(p-n) + 2\lambda(1-p)}{2} \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2} \Phi(X_s)$$

D'autre part, $\sigma^{1-p,1}(x) = (1-p)\sigma^{(p)}(x)$, par définition de $\sigma^{(p)}$ (cf: (2.d)).
Posons $H_t^{(p)} = (p-1)^2 \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^{2p}}$, et notons $(\tau_h^{(p)}, h < H_\infty^{(p)})$ l'inverse de $H^{(p)}$.

On note (β_t) le nouveau mouvement Brownien obtenu en transformant le processus $(1-p)\int_0^t \frac{dB_s}{|B_s|^p}$ au moyen du changement de temps $(\tau_t^{(p)})$. On obtient alors, en posant $Y_t = \Phi(B_{\tau_t^{(p)}})$, $(t < H_\infty^{(p)})$:

(5.b) $$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma^{(p)}(Y_s) \cdot d\beta_s + k \int_0^t ds \frac{Y_s}{|Y_s|^2} ,$$

avec:

(5.c) $$k = \frac{p(p-n) + 2\lambda(1-p)}{2(p-1)^2}$$

Pour tout $p \neq 1$, et $k \in \mathbb{R}$, on désigne désormais par $MB_n(p,k)$ le processus de diffusion défini comme solution de l'équation (5.b), jusqu'en T_0, son premier temps d'atteinte de 0.
~~Ils~~ D'après la formule d'Itô, $(|Y_t|, t \leq T_0)$ est un processus de Bessel de dimension:

(5.d) $$d_{p,k} = \frac{n-1}{(p-1)^2} + 2k + 1$$

(Il est intéressant, pour la suite, d'introduire également l'indice $\nu_k = \frac{d_{p,k}}{2} - 1$).
En particulier, si $d_{p,k} \geq 2$, ou bien: $\nu_k \geq 0$, (Y_t) n'atteint jamais 0 et l'équation (5.b) admet donc une unique solution définie pour tout $t \geq 0$.

~~Remarques~~

p étant fixé, posons :

(5.e) $$\tilde{k} = 1 - k - \frac{(n-1)}{(1-p)^2}.$$

C'est l'unique réel $\tilde{k}$ tel que : $\nu_{\tilde{k}} = -\nu_k$.

On a : $d_{p,\tilde{k}} \geq 2$ si, et seulement si : $k \leq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(n-1)}{(p-1)^2}\right]$.

On peut maintenant énoncer les extensions suivantes de la proposition B et du théorème C, sous les conditions : $p \neq 1$, et $k < \frac{1}{2}\left[1 - \frac{n-1}{(p-1)^2}\right]$.

Proposition $B_{p,k}$: Le processus $MB_n(p,k)$ est le h-processus de Doob associé au processus $MB_n(p,\tilde{k})$, avec : $h(x) \equiv h_{k-\tilde{k}}(x) \equiv |x|^{k-\tilde{k}}$.

Théorème $C_{p,k}$: $(Y_u, u \leq T_0)$, resp : $(Z_u, u \leq 0)$, désigne le processus $MB_n(p,k)$, resp : $MB_n(p,\tilde{k})$, issu de $b \neq 0$.

Alors : $$\left\{(Y_u ; u \leq T_0) \,/\, T_0 = t\right\} \overset{(d)}{=} \left\{(Z_u, u \leq t) \,/\, Z_t = 0\right\}$$

Il existe au moins deux familles d'exemples particulièrement intéressants :

a) $p = 2$; $\lambda > \frac{1}{2}[2-n]$. Alors : $k = 2 - (n+\lambda)$; $\tilde{k} = \lambda$.

Sous ces hypothèses, on a donc montré qu'une solution de (5.a) est transformée par inversion, puis changement de temps en une autre solution de (5.a), elle-même h-processus d'une troisième solution de (5.a).

b) $p \geq 1$; $\lambda = 0$. On étudie les processus $\Phi_p(B_.)$.

Alors : $k \equiv k_p(n) = \frac{p(p-n)}{2(p-1)^2}$; $\tilde{k} \equiv \tilde{k}_{p,n} = k_p(n) + \frac{2\nu}{(p-1)^2} = \frac{(p-2)(2\nu+p)}{2(p-1)^2}$.

Remarquons encore la relation : $\tilde{k}_p(n) = k_{\bar{p}}(n)$, avec $\bar{p} = 2-p$.

Ainsi, on a le diagramme récapitulatif suivant, avec les notations définies en cours de texte :

$$\begin{tikzcd}
\Phi_p(B_.) \arrow[r, "\text{Changement de temps } \tau_.^{(p)}"] & MB_n(p, k_p(n)) \\
\Phi_{\bar{p}}(B_.) \arrow[r, "\text{Changement de temps } \tau_.^{(\bar{p})}"] & MB_n(p, \tilde{k}_p(n)) \arrow[u, "h\text{-processus, avec } h(x) = |x|^{-\frac{n-2}{(p-1)^2}}"']
\end{tikzcd}$$