A propos du théorème de Knight sur les martingales continues orthogonales.

Novembre 1983

1. Rappels.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace de probabilité filtré.
On ne considère par la suite que des $(\mathcal{F}_t)$ martingales continues $(M_t)_{t \geq 0}$ telles que $M_0 = 0$, et $\langle M \rangle_\infty = \infty$.

(1.1) En 1965, Dubins-Schwartz [3] et Dambis [2] ont montré, de façon indépendante, que si l'on note $\tau_t = \inf\{u : \langle M \rangle_u > t\}$, alors $(\beta_t = M_{\tau_t}, t \geq 0)$ est un $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ mouvement Brownien, et on a $M_t = \beta_{\langle M \rangle_t}$.

(1.2) Getoor-Sharpe ([4], 1972) ont étendu ce résultat aux martingales conformes $(Z_t, t \geq 0)$, c'est à dire à toute martingale continue, à valeurs complexes $Z = X + iY$, qui satisfait : $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$, et $\langle X, Y \rangle = 0$.
Si $\tau_t = \inf\{u : \langle X \rangle_u > t\}$, alors $\xi_t = Z_{\tau_t}$ est un $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ mouvement Brownien complexe, et $Z_t = \xi_{\langle X \rangle_t}$

(1.3) Une autre extension importante du résultat unidimensionnel a été faite par F. Knight ([8], 1970), qui a montré que, si (M_t) et (N_t) sont deux martingales orthogonales, i.e : $\langle M, N \rangle_. \equiv 0$, alors, leurs mouvements Browniens associés (cf : (1.1)) sont indépendants.

2. Deux comportements asymptotiques extrêmes.

(2.1) Les applications du théorème de Knight sont de plus en plus nombreuses ; citons, sans prétendre à être exhaustif, les articles de :

- Stroock-Varadhan-Papanicolaou [12], qui en déduisent de nombreux théorèmes limites pour les e.d.s.
- Kasahara-Kotani [7], qui en déduisent les théorèmes limites du second

ordre pour les fonctionnelles additives continues, à variation bornée, du mouvement Brownien complexe (voir également Messulam-Yor [9] pour les théorèmes limites pour les martingales fonctionnelles additives du mouvement Brownien complexe)

- Kasahara [6] pour l'étude du second ordre des nombres de descentes du mouvement Brownien réel, dans la bande $[0, \varepsilon]$, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.
- Pitman-Yor [10] pour l'étude des nombres de tours du mouvement Brownien complexe autour d'un nombre fini de points du plan.
- enfin, Yor ([13], [14]).

(2.2) L'extension suivante du théorème de Knight semble pouvoir être utilisée dans de nombreuses ~~applications~~ questions de convergence en loi (voir le paragraphe 4).

Dans la suite, M et N désignent toujours deux $(\mathcal{F}_t)$ martingales locales continues, telles que $\langle M\rangle_\infty = \langle N\rangle_\infty = \infty$, et admettent respectivement pour mouvements browniens associés β et γ.

Théorème A: S'il existe un processus $A(t)$ - éventuellement déterministe tel que :

(i) l'un des deux processus : $\frac{1}{t}\langle M\rangle_{A(t)}$, ou $\frac{1}{t}\langle N\rangle_{A(t)}$, converge, en probabilité, vers $+\infty$, lorsque $t\to\infty$,

et (ii)
$$\frac{1}{t}\int_0^{A(t)} |d\langle M,N\rangle_s| \xrightarrow[(t\to\infty)]{(P)} 0,$$

alors, le couple de processus : $\frac{1}{\sqrt{t}}(\beta_{t\cdot u}, \gamma_{t\cdot u}; u\geq 0)$ converge en loi[(1)] vers la loi d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

---

(1) $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ est muni de la topologie de la convergence compacte, et l'ensemble des probabilités sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ de la topologie de la convergence étroite associée.

(2.3) A l'opposé du théorème A (ou du théorème de Knight), il est naturel de chercher des conditions suffisantes portant sur deux martingales continues M et N pour que :

(2.a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\beta_{t.u} - \gamma_{t.u} \right) ; u \geq 0 \right\}$ converge en loi vers 0, lorsque $t \to \infty$

Les inverses : $\tau(u) \equiv \inf\{t : \langle M \rangle_t > u\}$ et $\sigma(u) \equiv \inf\{t : \langle N \rangle_t > u\}$ des processus croissants associés à M et N jouent un rôle fondamental dans la discussion ci-dessous.

Enonçons tout d'abord une condition générale suffisante pour que (2.a) soit satisfaite.

Théorème B : S'il existe un changement de temps (2) $(R(u), u \geq 0)$ tel que les trois propriétés suivantes aient lieu :

(i) $\frac{1}{u} \langle M \rangle_{R(u)} \xrightarrow[(u \to \infty)]{(P)} 1$; (ii) $\frac{1}{u} \langle N \rangle_{R(u)} \xrightarrow[u \to \infty]{(P)} 1$

et $(*)_R$: $\frac{1}{u} \langle M - N \rangle_{R(u)} \xrightarrow[u \to \infty]{(P)} 0$,

alors :

(2.a') pour tout $n > 0$, $\sup_{u \leq n} \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \beta_{t.u} - \gamma_{t.u} \right| \xrightarrow[(t \to \infty)]{(P)} 0$.

On peut appliquer le théorème B avec $R(u) = \sigma(u) \vee \tau(u)$ $(u \geq 0)$.

On a en effet le

Corollaire B :

L'assertion (2.b) $\frac{1}{u} \langle M - N \rangle_{\sigma(u) \vee \tau(u)} \xrightarrow[u \to \infty]{(P)} 0$

équivaut aux assertions conjointes :

$$
(2.c) \begin{cases} (2.c.i) \ \frac{1}{u} \langle M \rangle_{\sigma(u)} \xrightarrow{(P)} 1 \ ; \ (2.c.ii) \ \frac{1}{u} \langle N \rangle_{\tau(u)} \xrightarrow{(P)} 1 \\ (2.c.*) \ \frac{1}{u} \langle M - N \rangle_{\sigma(u) \wedge \tau(u)} \xrightarrow{(P)} 0 \end{cases}
$$

Si l'assertion (2.b) (et donc (2.c)) est satisfaite, la convergence (2.a) a lieu.

(2) c'est à dire un processus croissant $(R(u), u \geq 0)$ tel que, pour tout u, $R(u)$ soit un $\mathcal{F}_\cdot$ temps d'arrêt.

3. Démonstration des théorèmes A et B

(3.1) [Démonstration de A].

1) (•) Puisque, pour tout $t > 0$, $\left(\beta^{(t)}_u \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} \beta_{t\cdot u}, u \geq 0 \right)$ et $\left(\gamma^{(t)}_u \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} \gamma_{t\cdot u}, u \geq 0 \right)$ sont deux mouvements Browniens réels, les lois de $\frac{1}{\sqrt{t}} \left(\beta_{t\cdot u}, \gamma_{t\cdot u} ; u \geq 0 \right)$ sont tendues, lorsque t varie dans $\mathbb{R}_+$. Il suffit donc de montrer la convergence en loi des marginales de rang fini.

2) (•) Soient ~~[illegible]~~ $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+, du)$, que l'on suppose en outre bornées. Remarquons, par exemple, que l'on a :

$$\int_0^\infty f(u)\, d\beta_{t\cdot u} = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_u\right) dM_u .$$

Pour tout $t > 0$ fixé, le processus suivant est une martingale uniformément bornée.

$$\mathcal{U}^{(t)}_s = \exp\left[\frac{i}{\sqrt{t}} \left\{ \int_0^s f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_u\right) dM_u + \int_0^s g\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_u\right) dN_u \right\} + \frac{1}{2t} \langle U^{(t)}\rangle_s \right]$$

où

$$\langle U^{(t)}\rangle_s = \int_0^s d\langle M\rangle_u\, f^2\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_u\right) + \int_0^s d\langle N\rangle_u\, g^2\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_u\right) + 2\int_0^s d\langle M,N\rangle_u\, f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_u\right) g\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_u\right).$$

L'identité : $E\left(\mathcal{U}^{(t)}_\infty\right) = 1$ peut être réécrite sous la forme :

$$E\left[\exp\left\{ i\left[\int f(u)\, d\beta^{(t)}_u + \int g(u)\, d\gamma^{(t)}_u\right] + \frac{1}{t}\int_0^\infty d\langle M,N\rangle_s\, f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_s\right) g\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_s\right)\right\}\right]$$

$$= \exp -\frac{1}{2}\int (f^2+g^2)(u)\, du .$$

On déduit alors la convergence en loi des marginales de rang fini de $\beta^{(t)}$ et $\gamma^{(t)}$ après avoir remarqué que :

$$\exp \frac{1}{t}\int_0^\infty (d\langle M,N\rangle_s)\, f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_s\right) g\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_s\right)$$

converge dans $L^1(P)$ vers 1.

En effet, cette expression est majorée, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par : $\exp\left(\|f\|_2 \cdot \|g\|_2\right)$, où $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty du\, f^2(u)\right)^{1/2}$, et, d'autre part, converge ~~[illegible]~~ en probabilité vers 1, car :

$$\frac{1}{t}\left|\int_0^\infty d\langle M,N\rangle_s\, f\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_s\right) g\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_s\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{t}\int_0^{A(t)} |d\langle M,N\rangle_s|\ \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

$$+\frac{1}{t}\left(\int_{A(t)}^\infty d\langle M\rangle_s\, f^2\left(\frac{1}{t}\langle M\rangle_s\right)\right)^{1/2}\left(\int_{A(t)}^\infty d\langle N\rangle_s\, g^2\left(\frac{1}{t}\langle N\rangle_s\right)\right)^{1/2}$$

La première expression converge vers 0 lorsque $(t\to\infty)$, la seconde est égale, par changement de variables, à :

$$\left(\int_{\frac{1}{t}\langle M\rangle_{A(t)}}^\infty dv\, f^2(v)\right)^{1/2}\left(\int_{\frac{1}{t}\langle N\rangle_{A(t)}}^\infty dv\, g^2(v)\right)^{1/2},$$

et converge donc vers 0, lorsque $(t\to\infty)$, en conséquence de (i).

(3.2) [Démonstration de B].

1) Les propriétés (2.a) et (2.a') sont équivalentes. D'autre part, les lois de $\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}(\beta_{t.u}-\gamma_{t.u}),\ u\geq 0\right\}$ sont tendues, lorsque t varie ; il suffit donc, pour que (2.a) ait lieu, que les marginales de rang fini convergent en probabilité vers 0, ce qui équivaut ici à montrer :

$$(2.a'')\qquad \frac{1}{\sqrt{u}}|\beta_u-\gamma_u| \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 0.$$

2) Par définition de β et γ, on a : $\beta_u = M_{\tau_u}$; $\gamma_u = N_{\sigma(u)}$.

D'où : $\frac{1}{\sqrt{u}}|\beta_u-\gamma_u|$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{u}}|M_{\tau(u)}-M_{R(u)}| + \frac{1}{\sqrt{u}}|M_{R(u)}-N_{R(u)}| + \frac{1}{\sqrt{u}}|N_{R(u)}-N_{\sigma(u)}|.$$

D'après les inégalités de distribution de Burkholder-Gundy (cf : Burkholder [1]) il suffit, pour que chacune de ces 3 expressions converge vers 0 en probabilité, que les 3 expressions suivantes :

$$\frac{1}{u}|\langle M\rangle_{\tau(u)}-\langle M\rangle_{R(u)}|\ ;\ \frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{R(u)}\ ;\ \frac{1}{u}|\langle N\rangle_{R(u)}-\langle N\rangle_{\sigma(u)}|$$

convergeant en probabilité vers 0.

Or, on a : $\langle M\rangle_{\tau(u)} = \langle N\rangle_{\sigma(u)} = u$, et le théorème est démontré.

(3.3) [Démonstration du Corollaire B]

$(2.b) \Rightarrow (2.c)$: A l'évidence, $(2.b) \Rightarrow (2.c.*)$;
d'autre part, $(2.b) \Rightarrow (2.c.i)$ découle de l'inégalité de Minkowski, qui entraîne :

$$\left| \sqrt{\frac{1}{u}\langle M\rangle_{\sigma(u)}} - 1 \right| \leq \sqrt{\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{\sigma(u)}}$$

$(2.c) \Rightarrow (2.b)$.

On a :

$$\frac{1}{u}\left\{\langle M-N\rangle_{\sigma(u)\vee\tau(u)} - \langle M-N\rangle_{\sigma(u)\wedge\tau(u)}\right\}$$
$$\equiv \frac{1}{u}\left|\langle M-N\rangle_{\sigma(u)} - \langle M-N\rangle_{\tau(u)}\right|$$
$$\equiv \frac{1}{u}\left|\langle M\rangle_{\sigma(u)} - \langle N\rangle_{\tau(u)} + 2\left\{\langle M,N\rangle_{\sigma(u)} - \langle M,N\rangle_{\tau(u)}\right\}\right|$$

Or, d'après (2.c.i) et (2.c.ii), on a :

- d'une part, $\frac{1}{u}\left|\langle M\rangle_{\sigma(u)} - \langle N\rangle_{\tau(u)}\right| \xrightarrow{(P)} 0$
- d'autre part, $\frac{1}{u}\left|\langle M,N\rangle_{\sigma(u)} - \langle M,N\rangle_{\tau(u)}\right|$

$$\leq \left(\frac{1}{u}\left|\langle M\rangle_{\sigma(u)} - \langle M\rangle_{\tau(u)}\right|\right)^{1/2}\left(\frac{1}{u}\left|\langle N\rangle_{\sigma(u)} - \langle N\rangle_{\tau(u)}\right|\right)^{1/2} \xrightarrow{(P)} 0.$$

L'implication est démontrée.

4. Applications à l'étude asymptotique du mouvement Brownien complexe.

Soit $(Z_t, t\geq 0)$ mouvement Brownien complexe issu de z_0, et a, b deux points ~~distincts~~ tels que : z_0, a, b soient distincts. Rappelons qu'une détermination continue de l'argument de la trajectoire $(Z_u, u\leq t)$ autour de a, resp. b, est donnée par l'intégrale stochastique :

$$(4.a) \qquad \theta_t^a = \mathrm{Im}\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s - a} \quad ; \quad \theta_t^b = \mathrm{Im}\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s - b}.$$

Etant donnés $r, \rho > 0$, considérons les disques $D(a,r)$, et $D(b,\rho)$, centrés respectivement en a et b, et ayant pour rayons r et ρ.

Notons ensuite,

$$\theta_t^{a,0} = \int_0^t d\theta_s^a \, 1(Z_s \in D(a,r)) \; ; \; \theta_t^{a,\infty} = \int_0^t d\theta_s^a \, 1(Z_s \notin D(a,r))$$

et définissons de même les intégrales $\theta_t^{b,0}$ et $\theta_t^{b,\infty}$.

$(\theta_t^{a,0})$, resp: $(\theta_t^{a,\infty})$ représentent la contribution à l'argument (θ_t^a) des incursions de $(Z_u, u \leq t)$ à l'intérieur de $D(a,r)$, resp: des excursions de $(Z_u, u \leq t)$ à l'extérieur de D(a,r).

On a le

Théorème C : 1) Les mouvements Browniens associés respectivement à $\theta^{a,0}$, $\theta^{b,0}$, $\theta^{a,\infty}$ sont asymptotiquement indépendants, c'est à dire que la conclusion du théorème A est satisfaite (avec 3 mouvements Browniens au lieu de 2)(3).

2) Les mouvements Browniens associés à $\theta^{a,\infty}$ et $\theta^{b,\infty}$ sont asymptotiquement identiques, c'est à dire vérifient la conclusion du théorème B.

Démonstration : 1) Remarquons tout d'abord l'identité :

$$(4\cdot b) \qquad d\langle \theta^a, \theta^b \rangle_s = \frac{(Z_s - a)\cdot(Z_s - b)\, ds}{|Z_s - a|^2 |Z_s - b|^2} .$$

Pour tout ensemble compact $\Gamma \subset \mathbb{C}$, la fonction : $z \longrightarrow 1_\Gamma(z) \dfrac{(z-a)\cdot(z-b)}{|z-a|^2|z-b|^2}$ est intégrable. En conséquence du théorème ergodique pour le mouvement Brownien complexe (cf : Itô-Mc Kean, p. 277 [5]), on a donc :

$$(4\cdot c) \qquad \frac{1}{(\log t)} \int_0^t 1_\Gamma(Z_s)\, d\langle \theta^a, \theta^b \rangle_s \xrightarrow[(t\to\infty)]{(d)} 0 .$$

Ainsi, si M et N désignent 2 des 3 processus $\theta^{a,0}$, $\theta^{b,0}$ et $\theta^{a,\infty}$, on a :

$$(4\cdot c') \qquad \frac{1}{\log t} \langle M, N \rangle_t \xrightarrow[(t\to\infty)]{(d)} 0 .$$

---

(3) Le théorème A s'étend sans problème à un n-uplet de martingales $(M^1, \ldots, M^n)$: on conclut à l'indépendance asymptotique des mouvements Browniens β^j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ associés, dès que chaque paire (M^i, M^j) $(i \neq j)$ satisfait les hypothèses du théorème A, avec éventuellement des processus $A^{i,j}$ différents selon les paires (i,j).

D'autre part, on sait (cf : Messulam-Yor [9], Pitman-Yor [10]) que : (4.d) $\frac{1}{(\log t)^2}\langle M\rangle_t \xrightarrow[(t\to\infty)]{(d)} \cdot$; $\frac{1}{(\log t)^2}\langle N\rangle_t \xrightarrow[(t\to\infty)]{(d)} \cdot$,
les lois limites ne chargeant p.s. pas $\{0\}$.
On déduit de (4.c') et (4.d) que, pour $0<\varepsilon<1$, on a :

$$\frac{1}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\langle M\rangle_t \xrightarrow{(P)} \infty \; ; \; \frac{1}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\langle N\rangle_t \xrightarrow{(P)} \infty \; ; \; \frac{1}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\langle M,N\rangle_t \xrightarrow{(P)}$$

et donc, les hypothèses du théorème A sont satisfaites.

2) Notons $M = \theta^{a,\infty}$ et $N = \theta^{b,\infty}$.

Les points a et b jouant un rôle symétrique, il suffit de démontrer, pour pouvoir appliquer le corollaire B, que : $\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{\sigma(u)} \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 0$.
Or, d'après (4.a) et (4.b), on a : $\langle M-N\rangle_t = \int_0^t f(Z_s)\,ds$,
avec $f \in L^1(\mathbb{C}, dx\,dy)$, et, en conséquence du théorème ergodique pour le mouvement Brownien complexe, il suffit donc de montrer, par exemple : $\frac{1}{u}\ell_{\sigma(u)} \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 0$, où $(\ell_t, t\geq 0)$ désigne le temps local en $(\log \rho)$ de la martingale locale $(\log|Z_t - b|)$.
Mais, d'après la formule de Tanaka, on voit aisément que : $\frac{1}{\sqrt{u}}\ell_{\sigma(u)} \xrightarrow{(d)} \cdot$
d'où le résultat.