Application d'un lemme de T. Jeulin au grossissement de la filtration brownienne

M. Yor.

1. Introduction et position du problème.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne l'espace de probabilité de référence. Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ deux filtrations[1] composées de sous-tribus de $\mathcal{A}$, et vérifiant : $\forall t, \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.
L'espace $\mathcal{L}$ des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable qui sont également des $\mathcal{G}$-martingales est un $\mathcal{F}$-espace stable (i.e : stable, relativement à la filtration $\mathcal{F}$). Il découle de cette remarque que, pour que l'hypothèse :

(H) toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale

soit réalisée, il suffit (et il est évidemment nécessaire) qu'elle soit vérifiée par une famille génératrice de l'espace des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable (considéré comme $\mathcal{F}$-espace stable).

Il n'en est pas de même (voir ci-dessous) lorsque l'on s'intéresse à l'hypothèse :

(H') toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-semi-martingale.

à la ligne !

Dans la suite, μ est une probabilité sur $[0,\infty[$, telle que $\int_0^\infty \mu(dx)\,x < \infty$; μ est supposée, dans tout l'exposé, différente de ε_0 (le cas $\mu = \varepsilon_0$ est trivial).

— $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration donnée, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel, nul en 0.

— $(\mathcal{F}^\mu_t)_{t\geq 0}$ est la plus petite filtration contenant $\mathcal{F}$ et telle que le processus $\left(I^\mu_t = \int_{]t,\infty]} B_s \, d\mu(s),\ t \geq 0\right)$ soit $\mathcal{F}^\mu$-adapté.

---

(1) toutes les filtrations considérées ici satisfont — sauf mention contraire — les conditions habituelles.

L'objet de cette Note est d'étudier la propriété (H') pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\mu)$ et, plus précisément, de caractériser les $\mathcal{F}$-martingales locales qui sont des $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingales.

En [2], K. Ito a montré que $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale lorsque $\mu = \varepsilon_1$ (voir aussi [4]), et $\mu(ds) = 1_{[0,1]}(s)\,ds$, et a posé — sous une forme légèrement différente — la question de savoir si (H') est ~~était~~ vérifiée pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\mu)$. D'après [4], la réponse est négative pour $\mu = \varepsilon_1$; ⟵ de façon générale, il résulte de la suite de l'article que (H') est vérifiée — dans ce cadre — si, et seulement si, $\mu\,(\neq \varepsilon_0\,!)$ n'est pas à support compact.

Signalons enfin que la méthode de démonstration employée ci-dessous est tout à fait différente de celle faite en [4], qui reposait essentiellement sur l'inégalité de Hardy dans L^2. Ici, c'est un lemme dû à T. Jeulin [3] qui joue le rôle essentiel (voir le paragraphe 3).

2. Le cas où μ est à support compact.

Enonçons tout d'abord un lemme préliminaire qui nous permettra de nous restreindre dans la suite à l'étude des $(\mathcal{F}_t)$ martingales locales qui sont intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B.

Lemme 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0, et $(U_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) U et B sont orthogonales, i.e : UB est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale

ii) U est une martingale locale — ~~localisée~~ réduite à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt — par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}'_t = \bigcap_{(\varepsilon > 0)} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \mathcal{B}_\infty)\right)$, où $\mathcal{B}_\infty = \sigma\{B_s,\ s \in \mathbb{R}_+\}$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, U est a fortiori une martingale locale par rapport à toute filtration $(\mathcal{G}_t)$ telle que : $\forall t,\ \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}'_t$.

Démonstration : Par arrêt (à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt), on peut supposer

T.S.V.P.

que U est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale uniformément intégrable (dans $L^1(\mathbb{P})$).

i) $\Longrightarrow$ ii) Grâce à la continuité à droite du processus U, il suffit de montrer : $\forall s<t$, $\forall f_s \in b(\mathcal{F}_s)$, $\forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty)$,

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s]$$

Notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle de B. La $(\mathcal{B}_t)$ martingale $M_t \overset{\text{déf}}{=} E[M_\infty | \mathcal{B}_t]$ est la somme d'une constante et d'une intégrale stochastique par rapport à B : c'est donc une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, égale à $E[M_\infty | \mathcal{F}_t]$, et qui est, de plus, orthogonale à U.

On a donc :

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_t M_t f_s] \overset{'}{=} E[U_s M_s f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

ii) $\Longrightarrow$ i) Par hypothèse, on a :

$$\forall s<t,\quad \forall f_s \in b(\mathcal{F}_s),\quad \forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty),$$

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \inf\{t \geq 0 \,/\, |B_t| \geq n\}$, et posons : $M_\infty = B_{t\wedge T_n}$. Il vient alors :

$$E[U_t B_{t\wedge T_n} f_s] = E[U_s B_{t\wedge T_n} f_s],$$

et donc : $E[(UB)_{t\wedge T_n} f_s] = E[(UB)_{s\wedge T_n} f_s]$, ie : (UB) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale.

La fin du lemme est évidente.

Revenons à l'étude du couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\mu)$; notons $a(<\infty)$ la borne supérieure du support de μ, et $\bar\mu(u) = \mu(]u,\infty[)$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

<u>Théorème 1.</u> <u>Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en</u> : $X = \int_0^\cdot \varphi_s dB_s + V$, <u>avec</u> φ <u>processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible tel que</u> : $\forall t,\ \int_0^t \varphi^2(s)ds < \infty$ P p.s, <u>et</u> V <u>$(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B,</u>

<u>alors</u>, X <u>est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si</u>,

(1) $$\int_0^a ds\, |\varphi_s|\, \bar\mu(s) \left\{\int_s^a du\, (\bar\mu(u))^2\right\}^{-1/2} < \infty, \quad P\ \text{p.s.}$$

<u>De plus</u>, <u>si cette condition est réalisée</u>, <u>l'intégrale</u>

(2) $$\int_0^a ds\, |\varphi_s| \frac{\bar\mu(s)}{\int_s^a du\, (\bar\mu(u))^2} \left| \int_{]s,a]} (B_u - B_s)\, d\mu(u) \right|$$ <u>est finie P p.s,</u>

<u>et</u>

(3) $$X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\, \varphi_s \frac{\bar\mu(s)}{\int_s^a du\, (\bar\mu(u))^2} \left\{ \int_{]s,a]} (B_u - B_s)\, d\mu(u) \right\}$$

<u>est une $\mathcal{F}^\mu$-martingale locale.</u>

Avant de poursuivre, il est aisé de remarquer que, pour $0 \leq s \leq a$, la variable $J^\mu_s = \int_{]s,a]} (B_u - B_s)\, d\mu(u)$ est gaussienne, centrée, et a pour variance
$$\gamma^\mu_s = \int_s^a du\, (\bar{\mu}(u))^2 .$$

Enonçons les principales conséquences du théorème 1, que l'on démontrera au paragraphe 3.

Corollaire 1.1 : Le $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B est une $\mathcal{F}^\mu$ semi-martingale si, et seulement si : $A_\mu \overset{\text{déf}}{=} \int_0^a ds\, \bar{\mu}(s) (\gamma^\mu_s)^{-1/2} < \infty$

La condition : $A_\mu < \infty$ est réalisée dès qu'il existe une constante $c > 0$ ~~telle que~~ et α, ~~telle~~, avec $0 < \alpha < a$, tels que :
$$\forall\, s \in [\alpha, a], \qquad \bar{\mu}\left(\frac{s+a}{2}\right) \geq c\, \bar{\mu}(s).$$

Enfin, il existe des probabilités μ à support compact telles que : $A_\mu = \infty$.

Démonstration : La première assertion découle immédiatement du théorème 1, appliqué à $X = B$. Pour la seconde, on minore, pour $s \in [\alpha, a]$, l'intégrale $\int_s^a du\, (\bar{\mu}(u))^2$ par $\int_s^{\frac{s+a}{2}} du\, (\bar{\mu}(u))^2 \geq c^2 \left(\frac{a-s}{2}\right) (\bar{\mu}(s))^2$, et, finalement, au voisinage de a, l'intégrand qui figure dans la définition de A_μ est majoré par $\dfrac{\sqrt{2}}{c\,(a-s)^{1/2}}$, ce qui entraîne : $A_\mu < \infty$.

Enfin, la question de l'existence de μ à support compact telle que $A_\mu = \infty$ est résolue si l'on exhibe une fonction f continue, décroissante, ~~positive~~ sur $[1/2, 1]$, avec $f(1) = 0$, et $\displaystyle\int_{1/2}^1 du \frac{\sqrt{f(u)}}{\left(\int_u^1 f(v)\,dv\right)^{1/2}} = \infty$.

Or, la fonction $f(u) = e^{-1/(1-u)} \dfrac{1}{(1-u)^2}$ satisfait ces conditions.

Corollaire 1.2 : Soit $\mu\ (\neq \varepsilon_0)$ une probabilité sur $[0, \infty[$, à support compact. L'hypothèse (H') n'est pas vérifiée pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\mu)$.

Démonstration : Si l'hypothèse (H') était vérifiée, on aurait, pour toute fonction (déterministe) $f \in L^2[0,a]$:

$$\int_0^a ds\, |f(s)| \frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}} < \infty ,$$

ce qui équivaut à : $\int_0^a ds\, (\bar{\mu}(s))^2 (\gamma_s^\mu)^{-1} < \infty$.

Or, ceci ~~est impo~~ n'est pas ~~vérifié~~ le cas puisque : $\frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\gamma_s^\mu} \geq \frac{1}{(a-s)}$.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous procédons par étapes.

Etape 1. Notons $f^\mu(s) = \sqrt{\gamma_s^\mu}$, et $Y_t = \int_0^t f^\mu(s)\, dB_s \quad (t \geq 0)$

Montrons tout d'abord que $(Y_t, t \leq a)$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu, t \leq a)$ quasi-martingale, ce qui entrainera que $(Y_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu, t \geq 0)$ semi-martingale.

Pour cela, posons : $\mathcal{G}_t^\mu = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{I_s^\mu, s \leq t\}$

$$= \mathcal{F}_t \vee \sigma\{J_t^\mu\} = \mathcal{F}_t \vee \sigma\left\{\int_{]t,a]} (B_u - B_t)\, d\mu(u)\right\},$$

et remarquons que $\mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{G}_{t+}^\mu$

~~Le processus~~

Soient s et t deux nombres réels tels que : $0 < s < t < a$. Le processus de Wiener $(B_{u+s} - B_s, u \geq 0)$ étant indépendant de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$E[Y_t - Y_s \mid \mathcal{G}_s^\mu] = E[Y_t - Y_s \mid J_s^\mu]$$

$$= \alpha_{s,t}\, J_s^\mu ,$$

où $\alpha_{s,t}$ désigne le nombre réel déterminé par l'égalité suivante :

$$\alpha_{s,t}\, \gamma_s^\mu = E\left[(Y_t - Y_s) \int_{]s,a]} (B_u - B_s)\, d\mu(u)\right]$$

$$(4) \qquad = \int_{]s,t]} d\mu(u) \int_s^u f^\mu(v)\, dv + \left(\int_s^t f^\mu(v)\, dv\right) \bar{\mu}(t).$$

En remplaçant $\mathcal{G}_s^\mu$ par $\mathcal{G}_{s+\varepsilon}^\mu$, et en faisant tendre ε vers 0, il vient :

$$E[Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s^\mu] = \alpha_{s,t}\, J_s^\mu ,$$

soit encore, si l'on note, pour $h>0$, $p_h Y$ la projection $\mathcal{F}^\mu_t$-optionnelle de $(Y_{s+h},\ s\geq 0)$:

$$(p_h Y)_s - Y_s = \alpha_{s,s+h}\, J^\mu_s \qquad (s<a).$$

D'après Stricker [6], une condition nécessaire et suffisante pour que $(Y_t,\ t\leq a)$ soit une $(\mathcal{F}^\mu_t)_{t\leq a}$ quasi-martingale est que $\sup\limits_{\cancel{a>h>0}\ 0<h<a} C^\mu_h<\infty$,

où $$C^\mu_h = \frac{1}{h}\, E\left(\int_0^{a-h} |(p_h Y)_s - Y_s|\, ds\right).$$

Or,
$$C^\mu_h = \frac{1}{h}\int_0^{a-h} ds\ \alpha_{s,s+h}\, E|J^\mu_s|$$
$$= \frac{c}{h}\int_0^{a-h} ds\,(\alpha_{s,s+h})\sqrt{\gamma^\mu_s} \qquad \left(c=\sqrt{2/\pi}\right).$$

Il découle alors de (4) que $C^\mu_h \leq c\displaystyle\int_0^a ds\, \bar\mu(s)<\infty$, d'où le résultat.

<u>Etape 2.</u> Notons A l'unique processus continu, nul en 0, à variation finie sur tout compact, et adapté à $(\mathcal{F}^\mu_t)$ tel que $Y-A$ soit une $(\mathcal{F}^\mu_t)$ martingale locale. Le but de cette étape est d'expliciter A.

On a bien sûr : $A_t = A_{t\wedge a}$. D'autre part, le processus $(Y_t,\ t\leq a)$ étant une $(\mathcal{F}^\mu_t)$ quasi-martingale, et vérifiant : $E[\sup\limits_{(t\leq a)} |Y_t|]<\infty$, une légère modification du théorème 54, p. 121 et 122, de Dellacherie [1], ou de celui de Meyer [5], p. 157,

permet d'écrire : $$A_t = L^1\lim_{(h\to 0)} A^h_t \qquad (t<a),\ \text{où :}$$

$$A^h_t = \frac{1}{h}\int_0^t [(p_h Y)_s - Y_s]\, ds = \int_0^t \frac{\alpha_{s,s+h}}{h}\, J^\mu_s\, ds$$

Or, $\dfrac{1}{h}\alpha_{s,s+h} \xrightarrow[(h\to 0)]{} \dfrac{\bar\mu(s)}{f^\mu(s)}$, et l'on ~~a~~ peut appliquer le théorème de convergence dominée relativement à la mesure $1_{[0,t]}(s)\,ds$, puis à P, à l'aide de la majoration : $\left|\dfrac{1}{h}\alpha_{s,s+h}\, J^\mu_s\right| \leq \dfrac{|J^\mu_s|}{f^\mu(s)}$, la variable $\left(\frac{J_s^\mu}{f^\mu(s)}\right)$ étant normale réduite centrée.

Finalement, on obtient : $A_t = \int_0^{t\wedge a} ds\, \frac{\bar{\mu}(s)}{f^\mu(s)}\, J_s^\mu$.

(dans la suite, on note $N = Y - A$).

<u>Etape 3.</u> Soit $X_t = \int_0^t \varphi_s\, dB_s$, avec φ_0 processus $\mathcal{F}_0$-prévisible tel que : $\forall t, \int_0^t \varphi^2(s)\, ds < \infty$ P p.s. (d'après le lemme 1, il suffit de considérer ... les ~~martingales~~ $\mathcal{F}$-martingales locales). On veut montrer ici que :

i) X est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si, l'intégrale figurant en (2), soit : $\int_0^a ds\, |\varphi_s|\, \frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma_s^\mu}\, |J_s^\mu|$, est finie P p.s.

ii) si cette condition est réalisée, $X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\, \varphi_s\, \frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma^\mu(s)}\, J_s^\mu$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

On peut clairement prendre pour intervalle de temps $T = [0,a]$.

Si $X_t = \int_0^t \varphi_s\, dB_s$, on a aussi, en posant $\psi_s = \varphi_s / f^\mu(s)\, 1_{(s<a)}$,

$X_t = \int_0^t \psi_s\, dY_s$; pour tout $t \le a$.

- Si ψ est borné, l'intégrale stochastique de ψ par rapport à Y ne dépend pas de la filtration par rapport à laquelle Y est une semi-martingale. On peut donc écrire, avec les notations de l'étape 2 :

$$(*) \quad X_t = \int_0^t \psi_s\, dN_s + \int_0^t \psi_s\, dA_s \qquad (t \geq 0).$$

- Si on suppose seulement que, pour tout t $\int_0^t \psi_s^2\, d\langle Y,Y\rangle_s < \infty$ P p.s, un passage à la limite (portant sur ψ, pour la convergence en probabilité) permet de montrer que la formule $(*)$ est encore valide pour tout $t < a$.

- Supposons maintenant que X est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ semi-martingale. D'après $(*)$, l'unique processus C continu, nul en 0, à variation finie, tel que : $X - C$ soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale vérifie :

$$\forall\, t<a, \qquad C_t = \int_0^t \psi_s\, dA_s .$$

~~Il égale~~ Cette égalité se prolonge par continuité à $(t=a)$; en particulier,

$$\int_0^a |dC_s| = \int_0^a |\psi_s|\,|dA_s| < \infty \quad P\ p.s,$$

i.e : l'intégrale figurant en (2) est finie P p.s.

De même, le processus défini par (3) est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

- Inversement, si $\int_0^a |\psi_s|\,|dA_s| < \infty$ P p.s, le processus

$\left(\int_0^t \psi_s\, dA_s,\ t\geq 0\right)$ est à variation finie sur tout compact, et l'égalité (*) se prolonge par continuité à tout $t\leq a$. En conséquence, X est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ semi-martingale, et $\left(X_t - \int_0^t \psi_s\, dA_s,\ t\geq 0\right)$ une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

Etape 4. Il nous reste à montrer que : $\int_0^a ds\, |\psi_s| \dfrac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}} < \infty$ P p.s,

si, et seulement si : $\int_0^a ds\, |\psi_s| \dfrac{\bar{\mu}(s)}{\gamma_s^\mu}\, |J_s^\mu| < \infty$ P p.s.

Comme cela a été annoncé dans l'introduction, c'est le résultat suivant, dû à T. Jeulin [3], qui sert ici, ~~de~~ ~~d'outil~~ ainsi que pour d'autres exemples de grossissement (cf [3]) d'outil fondamental.

Lemme 2 : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ désigne un espace de probabilité filtré usuel, et $(K_t)_{t\geq 0}$ un processus croissant $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

Soit $(R_t, t\geq 0)$ un processus mesurable positif qui vérifie la propriété suivante :

il existe une probabilité λ sur $[0,\infty[$ telle que :

$$\int \lambda(dx)\, x < \infty \quad ; \quad \lambda\{0\} = 0 \quad ; \quad \text{et :}$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, borélienne, bornée :

$$(5) \qquad {}^{(p)}\big(f(R)\big)_t = \int \lambda(dx)\, f(x), \quad \text{pour } t\in \mathrm{Supp}(K)$$

Alors, $\left(\int_0^\infty R_s \, dK_s < \infty\right) = (K_\infty < \infty)$ P p.s.

Quitte à faire le changement de temps : $t \longrightarrow \frac{at}{(1+t)}$, on peut évidemment prendre pour intervalle de temps $T = [0,a[$. Le résultat cherché découle alors du lemme de Jeulin appliqué au processus croissant

$$K_t = \int_0^t ds\, |\varphi_s| \frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma^\mu_s}} \quad , \text{ et au processus } R_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma^\mu_t}} |J^\mu_t| ,$$

qui vérifie (5), avec $\lambda(dx) = \sqrt{2/\pi}\, dx\, e^{-x^2/2}$.

4. Le cas où μ n'est pas à support compact.

Dans ce cas, la fonction continue (γ^μ_s) est strictement positive, et donc bornée uniformément par un réel positif, non nul, sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Aussi, les difficultés rencontrées au paragraphe 3 disparaissent, et, reprenant la démonstration précédente, avec $a = \infty$, on obtient le :

Théorème 2 : Si μ n'est pas à support compact, la propriété (H') est vérifiée pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\mu)$.

De plus, si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en : $X = \varphi \cdot B + U$, avec φ processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, et U $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B, le processus :

$$X_t - \int_0^t ds\, \varphi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^\infty du\, (\bar{\mu}(u))^2} \left\{ \int_{]s,\infty[} (B_u - B_s)\, d\mu(u) \right\}$$

est une $(\mathcal{F}^\mu_t)_{t \geq 0}$ martingale locale.

Remarque : Là encore, le lemme de Jeulin permet d'obtenir des précisions intéressantes.

Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, on note $X = M + C$ sa $\mathcal{F}^\mu$-décomposition canonique (M est une $\mathcal{F}^\mu$-martingale locale ; C un processus à variation finie, continu, nul en 0).

pour que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable $X = M + C$ vérifie $\int_0^\infty |dC_s| < \infty$ P p.s, il est nécessaire que

$$\int_0^\infty ds \frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\int_s^\infty du\,(\bar{\mu}(u))^2} < \infty .$$

Or, ceci n'est pas possible, cette dernière intégrale de Riemann étant égale à $+\infty = -\log F(\infty) + \log F(0)$, si $F(u) \overset{\text{déf}}{=} \int_u^\infty dv\,(\bar{\mu}(v))^2$.

A fortiori, il n'est pas vrai que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ semi-martingale de H^1.

Références:

[1] C. Dellacherie: *Capacités et processus stochastiques.* Springer-Verlag (1972).

[2] K. Ito: Extension of stochastic integrals. Proc. of Intern. Symp. SDE. Kyoto (1976), p. 95-109.

[3] T. Jeulin: Conditions nécessaires et suffisantes pour le grossissement d'une filtration. (à paraître).

[4] T. Jeulin et M. Yor: Inégalité de Hardy, semimartingales et faux-amis. Sém. Proba. Strasbourg XIII, Lect. Notes in Maths, Springer (1979).

[5] P.A. Meyer: Probabilités et potentiels. Hermann, Paris (1966).

[6] C. Stricker: Une caractérisation des quasimartingales. Sém. Proba ~~VIII~~, Strasbourg IX, Lect. Notes in Maths 465, Springer (1975).