Autour du livre de Mandelbrot, et des interventions à l'INRIA, 18 Mai 1998.

1. La loi log-normale et le problème des moments.

Une probabilité sur un intervalle fini $[a,b]$ est déterminée par ses moments entiers.

Ce n'est pas le cas en général pour les probabilités sur $\mathbb{R}$, ou sur $\mathbb{R}_+$, et l'exemple de la loi log-normale, c'est à dire la loi de $\exp(N)$, avec N Gaussienne, est très instructif à ce point de vue.

- Voir Stoyanov : Counterexamples in Probability - Wiley - (autour de la page 89).
- Voir aussi Berg qui montre que la loi de N^3 n'est pas déterminée par ses moments. Par contre, la loi de N^2 l'est, car elle possède des moments exponentiels.
- Il existe des conditions suffisantes [Critère de Carleman] qui assurent qu'une loi est déterminée par ses moments, mais il reste des problèmes ouverts : par exemple, l'intégrale sur $[0,T]$ du mouvement brownien géométrique est-elle déterminée par ses moments ?

Références générales : 1) Oeuvres de Stieltjes (voir vol. spécial Ann. Toulouse (1996)

2) plus près de nous : Shohat et Tamarkin.

2) Les lois scalantes (: terminologie de Mandelbrot).

Il s'agit de lois de v.a. X à valeurs dans $[1,\infty)$ telles que :

$$P(X \geq x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \quad , \quad x \geq 1, \text{ pour un certain } \alpha > 0.$$

Il est immédiat que :

$$X \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{U^{\beta}}, \quad \text{avec } \beta = 1/\alpha, \text{ et } U$$

uniforme sur $[0,1]$.

Le cas $\alpha (= \beta !) = 1$ se rencontre très fréquemment à cause du

Lemme : Si $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale ≥ 0, continue, issue de 1, et tendant vers 0 en $+\infty$, alors :

$$(1) \qquad \sup_{t \geq 0} M_t \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{U}$$

Exemples : a) $\quad M_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right), \ t \geq 0.$

b) On peut exploiter (1) de nombreuses manières ; en particulier, si $(R_t, t \geq 0)$ est une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, transiente, alors il existe une fonction $s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dite fonction d'échelle, telle que : $s(0+) = +\infty$, $s(\infty) = 0$, et $(s(X_t), t \geq 0)$ est une martingale locale. On a donc, d'après (1) :

$$\cancel{(2)} \qquad \sup_{u \geq 0} s(R_u) \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{U},$$

soit,

$$(2) \qquad \inf_{u \geq 0} R_u \overset{(\text{loi})}{=} s^{-1}\left(\frac{1}{U}\right).$$

Exemple : $R_t = BES(3)$ = norme du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$

Alors, $s(x) = 1/x$, d'où : $\inf_{u \geq 0} R_u \overset{(\text{loi})}{=} U.$

3) Propriété de Scaling :

[pour éviter d'éventuelles confusions, avec le paragraphe précédent, je dirai plutôt : propriété d'homogénéité, et je parlerai de processus homogènes].

- Définissons ici un processus homogène d'indice α : $(X_t, t \geq 0)$ comme étant un processus qui satisfait : pour tout $c > 0$,

$$(3) \qquad (X_{ct}, t \geq 0) \overset{(\text{loi})}{=} (c^\alpha X_t, t \geq 0)$$

Il y a beaucoup d'exemples de tels processus, qui apparaissent souvent à la suite de passages à la limite ....

- Ces processus possèdent un certain nombre de propriétés de stabilité (: je veux dire de "permanence") par des opérations algébriques : addition, produit, ~~etc~~ (pourvu que l'on opère avec des processus indépendants), élévation à une puissance, intégration etc....
Par exemple, si (conjointement) (X_t) et (Y_t) sont deux processus homogènes d'indices respectifs α et β, alors :

$$\left(\int_0^t X_s \, dY_s , \; t \geq 0 \right) \quad \text{est homogène d'indice } (\alpha + \beta)$$

Exemples : 1) $\left(\int_0^t s^m \, dB_s , \; t \geq 0 \right)$ est homogène d'indice $(m + 1/2)$

2) $\left(\int_0^t (t-u)^m \, dB_u , \; t \geq 0 \right)$ est également homogène d'indice $(m + 1/2)$, ce processus est intimement lié au mouvement brownien fractionnaire — Il est très différent du 1^{er} !!

3) Si B et C sont deux mouvements browniens indépendants, $\int_0^t B_s \, dC_s$ est homogène d'indice 1 ;
— ce n'est pas un processus gaussien ; — ce n'est pas un processus de Markov....

4) Martingales et processus à accroissements indépendants.

Bien sûr, ce sont là deux notions très différentes, mais il y a beaucoup de liens entre elles. –

Voici deux théorèmes fondamentaux :

A. Théorème de Dubins-Schwarz.

Toute martingale (locale) continue est un mouvement brownien, changé de temps, plus précisément, $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$

[Ceci donne une bonne explication du caractère universel du lemme du paragraphe 2].

B. Théorème de Watanabe.

Toute martingale purement discontinue, n'ayant que des sauts d'amplitude 1, est, à un changement de temps près, un processus de Poisson compensé –

Références générales (présentant les martingales discontinues dans leur ensemble) :

Kallenberg : Foundations of Probability – Springer (1997).

Fristedt-Gray : Modern Probability Theory – Birkhauser (1994) (?).

5) Pourquoi un processus continu, à accroissements indépendants, possède-t-il des accroissements normaux (c'est à dire : pourquoi est-il un processus Gaussien) ? et inversement ?? 5)

[Votre ancienne question 6)].

Une réponse consiste à regarder la démonstration de la formule de Lévy-Khintchine, (pour un processus de Lévy), ou plutôt ses ingrédients, dans le cas continu, et dans le cas discontinu.

— On cherche à expliciter : $E\left[\exp(i\lambda X_t)\right]$, dont on sait a priori (: ind. des accts) que cette expression est de la forme, $\exp(-t\,\psi(\lambda))$.

— Dans les 2 cas, continus, et discontinus, on commence par utiliser la formule d'Itô :

i) Cas continu :

$$(*) \qquad \exp(i\lambda X_t) = 1 + i\lambda\int_0^t e^{i\lambda X_s}\,dX_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{i\lambda X_s}\,d\langle X\rangle_s$$

Or, $X_t = M_t + ct$, $d\langle X\rangle_t = \sigma^2\,dt$

On prend les espérances des 2 côtés, et on obtient :

$$E\left[\exp(i\lambda X_t)\right] = \exp\left(i\lambda c t - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 t\right)$$

$$\text{ie :}\quad \psi(\lambda) = i\lambda c - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}.$$

ii) Cas discontinu :

La formule d'Itô est plus compliquée à écrire, puisqu'il faut tenir compte des sauts de X ; $(*)$ devient :

$$(**) \qquad \exp(i\lambda X_t) = 1 + i\lambda\int_0^t \left(e^{i\lambda X_{s-}}\right)dX_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{i\lambda X_{s-}}\,d\langle X\rangle_s$$
$$+ \sum_{s\le t}\left\{e^{i\lambda X_s} - e^{i\lambda X_{s-}} - i\lambda e^{i\lambda X_{s-}}(\Delta X_s)\right.$$

Il s'agit maintenant d'étudier soigneusement le terme :

$$\Phi_t \overset{\text{déf}}{=} E\left[\sum_{s\le t}\left\{e^{i\lambda X_s} - e^{i\lambda X_{s-}} - e^{i\lambda X_{s-}}(\Delta X_s)\, i\lambda\right\}\right]$$

On commence par factoriser $e^{i\lambda X_{s-}}$ dans l'expression $\{\quad\}$, ce qui fait apparaître le 2^{nd} facteur ne contenant qu'une fonction des sauts, qui est :

$$\left\{e^{i\lambda \Delta X_s} - 1 - (i\lambda)(\Delta X_s)\right\}$$

puis, c'est ce facteur qui est compensé au moyen de la mesure de Lévy $m(dx)$ associée aux sauts du processus (X_t) :

On obtient ainsi :

$$\Phi_t = E\left[\int_0^t ds \exp(i\lambda X_s)\right]\left(\int m(dx)\left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x\right)\right),$$

puis, on revient à $(**)$, où l'on prend les espérances des deux membres.
On obtient donc ainsi que la fonction $u(t) = E\left(e^{i\lambda X_t}\right)$ est solution d'une équa. diff. linéaire que l'on résout pour obtenir maintenant :

$$\psi(\lambda) = \underbrace{i\lambda c - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}_{\text{(Cas continu)}} + \underbrace{\int m(dx)\left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x\right)}_{\text{(Contribution des sauts)}}.$$

portée par $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Si on avait $\psi(\lambda) = k\lambda^2$

$$= \int m(dx)\left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x\right)$$

Ceci entraînerait, après deux dérivations que $m(dx)$ est portée par 0, donc nulle, ici pas de sauts.

6) Introduction aux mouvements browniens fractionnaires.

— Le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H satisfait :

$$E\left[\left(W_t^H - W_s^H\right)^2\right] = c\,(t-s)^{2H}$$

$$(0 < s < t)$$

Il est donc homogène d'indice H, mais ce n'est pas le seul ~~mouvement bro~~ processus Gaussien homogène d'indice H ! (Voir + haut).

— Une représentation célèbre de Mandelbrot – Van Ness est :

$$W_t^H = C \int_{-\infty}^{t} \left((t-u)^{\alpha-1} - (-u)_+^{\alpha-1} \right) dB_u$$

où : $\alpha = H + \frac{1}{2}$.

Ceci donne idée de considérer / discuter les processus de la forme : $\int_0^t h(t-u)\, dB_u$

(C'est à dire que, dans un 1er temps, on ne considère pas les parties "infinies", i.e. : $\int_{-\infty}^{0} dB_u$ etc.....).

— On peut se demander à quelle condition sur une fonction $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, le processus :

$$V_h(t) \stackrel{def}{=} \int_0^t dB_u\, h(t-u)$$

est une semimartingale — Cette question a été bien étudiée

(Knight, en particulier), et on est parvenu à une CNS (à développer).

– Ensuite, on regarde ~~B~~ les exemples :

$$h(u) = \int_0^\infty \mu(dx)\, e^{-xu}$$

Ce qui permet de représenter $(V_h(t),\ t \geq 0)$ sous la forme :

$$V_h(t) = \int_0^\infty \mu(dx) \underbrace{\int_0^t dB_u\, e^{-x(t-u)}}_{\text{processus de Ornstein-Uhlenbeck}}.$$

$$\equiv \int_0^\infty \mu(dx)\, Y_t(x).$$

et le processus : $t \longrightarrow Y_t$ est un processus de Markov de dimension infinie !

Je compte développer cela —

---

7) Votre question 8) : Stationarité — Ergodicité.

A développer : $\begin{cases} \text{– Rozanov –} \\ \text{– Erg. theory, etc....} \end{cases}$
