Compléments à :

Décomposition multiplicative d'une sous-martingale continue, et propriété d'intégrabilité.

16 Juillet 1991.

Nous donnons tout d'abord un complément à la Proposition 3.

Corollaire (de la Proposition 3) :

Sous les hypothèses de la Proposition 3, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i)} \quad E(M_\infty A_\infty) < \infty \quad ; \quad \text{(ii)} \quad E\left[\int_0^\infty M_s \, dA_s\right] < \infty$$

Lorsque l'une ou l'autre de ces propriétés est satisfaite, alors la martingale locale

$$(11) \qquad M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s \, dA_s \equiv \int_0^t A_{s-} \, dM_s \qquad (t \geq 0)$$

est en fait une martingale uniformément intégrable.

Démonstration : L'équivalence de (i) et (ii) découle immédiatement de la formule (5) ci-dessus. En outre, lorsque (i) est satisfaite, on a, a fortiori, pour tout t.a T $(\leq \infty)$:

$$E(M_T A_T) < \infty ,$$

et donc, en appliquant la formule (5) à $(M_{t \wedge T}, A_{t \wedge T})$, on obtient :

$$E(\xi_T) = C^{te} ,$$

où $\xi_t = M_t A_t - \int_0^t M_s dA_s$.

Cette propriété (d'espérances constantes, lorsque T varie parmi tous les t.a) équivaut à ce que $(\xi_t, t \geq 0)$ soit une martingale u.i $\square$.

Notre objectif est maintenant de déterminer, lorsque les hypothèses du Corollaire dessus sont satisfaites, sous quelles conditions supplémentaires la martingale u.i

$$\left(\int_0^t A_{s-} \, dM_s , \; t \geq 0\right)$$

est de carré intégrable.

Dans ce but, nous allons étudier l'intégrabilité de $\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s$ au moyen de la Proposition suivante.

<u>Proposition 3'</u> : <u>Soit</u> (M_t) <u>martingale continue uniformément intégrable</u> (à valeurs réelles) <u>telle que</u> $M_0 = 1$, <u>et</u> (A_t) <u>processus croissant continu</u>, <u>adapté</u>, tel que $A_0 = 1$.

<u>On a alors</u> :

$$(12) \qquad E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) = 1 + E\left[\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2\,E\left[\int_0^\infty M_s^2 A_s \, dA_s\right]$$

<u>Démonstration</u> : D'après la formule d'Itô, le processus :

$$M_t^2 A_t^2 - 1 - \int_0^t A_s^2 \, d\langle M\rangle_s - 2\int_0^t M_s^2 A_s \, dA_s \quad \text{est une martingale locale;}$$

il existe donc une suite de t.a. $T_n \uparrow \infty$ tels que l'on ait :

$$(13) \quad E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) = 1 + E\left[\int_0^{T_n} A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2\,E\left[\int_0^{T_n} M_s^2 A_s \, dA_s\right]$$

les deux membres étant finis, pour tout n.

D'après le théorème de Beppo-Levi, le membre de droite de (13) croît vers :

$$1 + E\left[\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2\,E\left[\int_0^\infty M_s^2 A_s \, dA_s\right].$$

Quant au membre de gauche, on a, d'une part, à l'aide du lemme de Fatou :

$$E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) \leq \underline{\lim}_n \; E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right).$$

D'autre part, on a : $M_{T_n} = E\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_{T_n}\right)$, et donc, d'après l'inégalité de Jensen (ou de convexité), on a :

$$E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) \leq E\left(M_\infty^2 A_{T_n}^2\right),$$

et la dernière quantité écrite croît, d'après Beppo Levi, vers $E(M_\infty^2$

On a donc, finalement :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) = E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right),$$

et la formule (12) découle donc finalement de la formule (13), dans laquelle on fait tendre n vers $+\infty$ □

Remarque : Il peut être intéressant de mettre en évidence, pour d'autres applications éventuelles, le résultat plus général suivant :

si $(Z_t, t\geq 0)$ est une sous-martingale continue de la classe (D), si (C_t) est un processus croissant continu adapté, et si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe, alors, on a :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\varphi(Z_{T_n}) C_{T_n}\right] = E\left[\varphi(Z_\infty) C_\infty\right] (\leq$$

On déduit, par exemple, de ce résultat, de la même façon que ci-dessus, l'identité suivante :

si (M_t) est une martingale continue uniformément intégrable, telle que $M_0 = 1$, si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe, dont la dérivée seconde est une fonction, et si (C_t) est un processus croissant continu, tel que $C_0 = 1$, alors, on a :

$$(14) \qquad E\left[\varphi(M_\infty) C_\infty\right] = 1 + \frac{1}{2} E\left[\int_0^\infty C_s \,\varphi''(M_s)\, d\langle M\rangle_s\right] + E\left[\int_0^\infty \varphi(M_s\right.$$

Une conséquence de la Proposition 3' est le :

Corollaire (de la Proposition 3') : Sous les hypothèses de la Proposition 3', les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) < \infty$;

(ii) $E\left[\left(\int_0^\infty M_s\, dA_s\right)^2\right] < \infty$ et $E\left[\int_0^\infty A_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] <$

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii) :

d'après la formule (12), (i) implique : $E\left[\int_0^\infty A_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$

$\Rightarrow M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s dA_s$ martingale bornée dans L^2 $\Rightarrow M_\infty A_\infty - \int_0^\infty M_s dA_s \in L^2$ ...

Revenant maintenant à (11), on obtient : $E\left[\left(\int_0^\infty M_s dA_s\right)^2\right] < \infty$, (12)

ce qui montre (ii) ;

(ii) $\Longrightarrow$ (i) est immédiat d'après (11). $\square$

$$\boxed{\text{Application au cas particulier où : } A_t = \frac{1}{I_t}}$$

Le Corollaire de la Proposition 3 devient alors (: ceci est un "déguisement" de la Proposition 5)

Proposition 5' : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que : $M_0 = 1$. On pose $I_t = \inf_{s\leq t} M_s$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i') $E\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right) < \infty$; (ii') $E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] < \infty$.

Si l'une ou l'autre de ces propriétés est réalisée, alors :

$\left(\frac{M_t}{I_t} - \log\frac{1}{I_t}, t \geq 0\right)$ est une martingale uniformément intégrable

Proposition 6 : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $M_0 = 1$, et que la propriété (i') (ou (ii')) soit satisfaite.

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(iii) $E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty$; (iv) $E\left[\left(\log\frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty$;

(v) $E\left[\int_0^\infty \frac{d\langle M\rangle_s}{I_s^2}\right] < \infty$.

Démonstration : (iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Ceci découle de ce que : (i) $\Longrightarrow$ (ii) dans le Corollaire de la Proposition 3', car : $M_s dA_s = \frac{-dI_s}{I_s}$, dans notre cas particulier

et donc : $E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty$ implique : $E\left[\left(\log\frac{1}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty$.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v) car la martingale : $\dfrac{M_t}{I_t} - \log\dfrac{1}{I_t}$ s'écrit :

$$1 + \int_0^t \frac{dM_s}{I_s}.$$

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Il nous faut ici remonter à la Proposition 3', formule (12), qui devient, dans le cas particulier :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) = 1 + E\left(\int_0^\infty \frac{d\langle M\rangle_s}{I_s^2}\right) + 2\,E\left(\log\frac{1}{I_\infty}\right).$$

Or $E\left(\log\dfrac{1}{I_\infty}\right) < \infty$ par hypothèse, et donc : (v) $\Longrightarrow$ (iii) $\square$

16 Juillet

Quelles sont les principales questions qui restent posées ?

1) Dans la Proposition 6, est ce que :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty \quad \text{équivaut à :} \quad E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty$$

2) Comment peut-on caractériser, $E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty$?

3) D'après la Proposition 6, on a :

$$(*) \qquad E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) < \infty \quad \text{ssi :} \quad E\left(\int_0^\infty d\langle M\rangle_s \, A_s^2\right) < \infty$$

dans le cas particulier où : $A_t = \frac{1}{I_t}$.

Est ce que l'équivalence (*) ci-dessus est satisfaite pour tout processus croissant A

4) A quelle condition est ce que, si $f \downarrow$, et si $(M_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable, on a :

$$\left(f(I_t) + f'(I_t)(M_t - I_t),\ t \geq 0\right)$$

uniformément intégrable dès que : $E\left[f(I_\infty)\right] < \infty$
(ou toute autre condition ne faisant intervenir que I_∞).

5) Au regard de mes inégalités de sous-martingales (Stochastics, 1979), les ~~sur~~ sous-martingales : $\left(\frac{M_t}{I_t} - 1,\ t \geq 0\right)$ jouent-elles un rôle particulier, au sens où il y aurait des inégalités qui seraient vraies dans ce cas, et qui ne le seraient pas pour une sous-martingale ?

[Je ne le pense pas ...].

Réponses aux questions.

Il est peut-être plus naturel de répondre à la Question 2, avant la question 1.

a) Réponse à la Question 2 :

Les sous-martingales $Y_t = m_t + \ell_t \equiv \frac{M_t}{I_t} - 1$

que nous avons considérées dans toute cette étude sont appellées sous-martingales de la classe (Σ) dans mon article à Stochastics (1979).

On tire alors de la Proposition a.4. de cet article la

Proposition 7 : Soit $Y_t \equiv m_t + \ell_t$ sous-martingale de la classe $(\Sigma) \cap (D)$.

Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe deux constantes universelles $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que :

$$(15) \qquad c_p \, E\left[|m_\infty|^p\right] \leq E\left[Y_\infty^p\right] \leq C_p \, E\left[|m_\infty|^p\right].$$

Corollaire (de la Proposition 7) : Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ martingale à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, uniformément intégrable, telle que $M_0 = 1$.

On suppose en outre que $E\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right) < \infty$, ou, de manière équivalente : $E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] < \infty$.

Alors, c_p et C_p désignant les mêmes constantes universelles que dans la Proposition 7, on a, pour $p \in]1, \infty[$:

$$(15') \qquad c_p \, E\left[\left|\log \frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right|^p\right] \leq E\left(\left|\frac{M_\infty}{I_\infty} - 1\right|^p\right)$$

$$\leq C_p \, E\left(\left|\log \frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right.\right.$$

Démonstration : Les hypothèses faites dans l'énoncé de ce Corollaire impliquent, d'après la Proposition 5, que : $Y_t \equiv \frac{M_t}{I_t} - 1$ est de la classe $(\Sigma) \cap (\ldots$

b) Réponse à la question 1.

On vient de voir, que sous les hypothèses de la Proposition 7 (ou plutôt de son Corollaire) l'hypothèse :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty \quad \text{implique :} \quad E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^p\right] < \infty.$$

Nous allons voir que l'implication réciproque :

$$E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^p\right] < \infty \ \text{"}\Longrightarrow\text{"} \ E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty$$

n'est pas nécessairement vraie ;

pour cela, il suffit de construire une sous martingale $Y_t = m_t + \ell_t$ de la classe $(\Sigma) \cap (D)$ telle que : $E(\ell_\infty^p) < \infty$,

mais que : $E(|m_\infty|^p) = \infty$

Or, on peut écrire une telle sous-martingale sous la forme :

$$Y_t = \tilde{s}_t - \tilde{m}_t, \quad \text{avec :} \quad \tilde{s}_t = \sup_{s \le t} (\tilde{m}_s).$$

Nous allons prendre : $\tilde{m}_t = B_{t \wedge T_\mu}$, $\tilde{s}_t = S_{t \wedge T_\mu}$,

où $T_\mu = \inf\{t : S_t \geq \psi_\mu(B_t)\}$, avec la mesure de proba μ admettant un moment d'ordre 1, et satisfaisant de plus :

$$\int_0^\infty t^p \, d\mu(t) < \infty, \quad \text{mais :} \quad \int_{-\infty}^0 |t|^p \, d\mu(t) = \infty.$$

Dans ce cas, d'après le Théorème 2.2, p. 630, de notre article dans le Séminaire $\underline{\text{XIII}}$, on sait que :

$$E(S_{T_\mu}^p) < \infty, \quad \text{et} \quad E(|B_{T_\mu}|^p) = \infty$$

C'est exactement ce que l'on cherchait.

<u>Exercice :</u> Expliciter (M_t) dans cet exemple.

$$M_t = \frac{1+Y_t}{A_t} = (1+Y_t)\, e^{-\ell_t} = (1+Y_t)\, e^{-\tilde{s}_t} = (1+\tilde{s}_t - \tilde{m}_t)\, e^{-\tilde{s}_t}$$

c) Je ne sais pas répondre à la question 3.

En toute généralité, d'après la Proposition 3', on a :

$$E\left(M_\infty^2 A_\infty^{2r}\right)<\infty \implies E\left[\int_0^\infty d\langle M\rangle_s\, A_s^{2r}\right]<\infty .$$

Je voudrais montrer que l'implication inverse n'est pas nécessairement vraie ...

d) Réponse à la question 4.

e) Réponse à la question 5.

Les sous-martingales $\left(\frac{M_t}{I_t}-1\right)$ ne jouent aucun rôle particulier dans les éléments de la classe (Σ), car toute telle sous-martingale peut être représentée sous cette forme ! Cette question 5 était une mauvaise question !!

Réponse à la question 4 :

Si f est une fonction décroissante telle que $f(1) = 0$,

si de plus elle est convexe, avec $f''(x) \geq 0$ (i.e. f'' est une fonction),

$$f'(1) = -1,$$

alors, pour que $\left(f(I_t) + f'(I_t)(M_t - I_t),\ t \geq 0 \right)$

soit une martingale uniformément intégrable, il est suffisant que :

$$(16) \qquad E\left[-f'(I_\infty) M_\infty \right] < \infty .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le Corollaire de la Proposition 3 à $A_t = -f'(I_t)$

ce qui donne :

$$M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s \, dA_s = -f'(I_t) M_t - 1 + \int_0^t I_s f''(I_s) \, dI_s .$$

est une martingale uniformément intégrable dès que (16) est vérifiée ;

or, on a :

$$\int_0^t I_s f''(I_s) \, dI_s = -F(I_t),$$

où :

$$F(x) = \int_x^1 dy \, y f''(y) \qquad (x \leq 1).$$

Or, on a :

$$f(1) - f(x) = -f(x) = \int_x^1 dy \, f'(y)$$

$$= \int_x^1 dy \, (f'(y) - f'(1)) + f'(1)(1-x)$$

$$= -\int_x^1 dy \int_y^1 dz \, f''(z) + (x-1)$$

$$= -\int_x^1 dz\, f''(z)(z-x) \; + (x-1)$$

$$= -\int_x^1 dz\, f''(z)\, z \; + x\left(f'(1) - f'(x)\right)$$

$$= - F(x) - x f'(x) - 1\,,$$

c'est à dire :

$$\boxed{F(x) = f(x) - x f'(x) - 1\,.} \qquad (17)$$

Une condition équivalente à (16) est donc (toujours d'après le Corollaire de la Proposition 3) :

$$(18) \qquad E\left(F(I_\infty)\right) < \infty\,.$$

condition qui, d'après (17) se ramène à :

$$(18') \qquad E\left[f(I_\infty)\right] < \infty \quad \text{et} \quad E\left[I_\infty\left(-f'(I_\infty)\right)\right] <$$

Par ailleurs, Biane a posé la question 6) suivante :

Est-ce que l'on peut avoir (M_t) unif. intégrable, et $E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] =$

La réponse est Oui, car ~~∃~~ cela équivaut à :

$$(M_t) \text{ unif intégrable et } E\left[\langle X\rangle_\infty\right] = \infty\,;$$

Or, ceci est réalisé avec : $M_t = \exp\left(B_{t\wedge T_1} - \frac{1}{2}(t\wedge T_1)\right)$.

$$T_1 = \inf\{t,\ B_t = 1\}\,, \qquad X_t = B_{t\wedge T_1}\,.$$