M

Décomposition multiplicative d'une sous-martingale continue et propriété d'intégrabilité.

13 Juillet 1991. 1)

1. Rappel sur les décompositions multiplicatives.

Nous considérons ici $(Y_t, t\geq 0)$ sous-martingale locale continue, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $Y_0=0$. Écrivons la décomposition additive de Y sous la forme :

$$Y_t = m_t + \ell_t \qquad (t\geq 0).$$

On a la

<u>Proposition 1</u> : Il existe $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale locale continue strictement positive, et $(A_t)_{t\geq 0}$ processus croissant continu adapté, uniques, tels que : $M_0 = A_0 = 1$ et :

$$(1) \qquad Y_t = M_t A_t - 1.$$

M et A sont donnés par les formules explicites :

$$(2) \qquad A_t = \exp\left(\int_0^t \frac{d\ell_s}{1+Y_s}\right)$$

$$(3) \qquad M_t = (Y_t+1)\exp\left(-\int_0^t \frac{d\ell_s}{1+Y_s}\right) \equiv \exp\left(\int_0^t \frac{dm_s}{1+Y_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle m\rangle_s}{(1+Y_s)^2}\right).$$

<u>Démonstration</u> : Si M et A satisfont (1), on a, d'après la formule d'Itô :

$$dY_t = dm_t + d\ell_t = A_t dM_t + M_t dA_t ,$$

d'où : $$(4.a) \quad dm_t = A_t dM_t \quad ; \quad (4.b) \quad d\ell_t = M_t dA_t ,$$

par unicité de la décomposition additive de Y.

On déduit de (4.b) en multipliant les deux membres par A_t :

$$dA_t\,(Y_t+1) = A_t\, d\ell_t ,$$

d'où : $dA_t = A_t \dfrac{d\ell_t}{1+Y_t}$, ce qui équivaut à : $A_t = \exp\left(\displaystyle\int_0^t \frac{d\ell_s}{1+Y_s}\right)$,

c'est à dire (2) ; on déduit alors la première formule (3) de (1) ;

en ce qui concerne la seconde partie de (3), elle découle de (4a), où l'on a multiplié les deux membres par M_t, ce qui donne :

$$dM_t = M_t \frac{dm_t}{(1+Y_t)},$$

ce qui explique la seconde formule de (3). $\square$

2. Une question d'intégrabilité.

$(Y_t, t \geq 0)$ satisfaisant toujours les hypothèses du paragraphe 1, on se propose maintenant de discuter, en termes de M et A l'appartenance de Y à la classe (D).

On a alors la

Proposition 2 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(Y_t, t \geq 0)$ appartient à la classe (D) ;

b) $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable,

et $E[M_\infty A_\infty] < \infty$

c) $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable

et $E\left[\int_0^\infty M_s dA_s\right] < \infty$.

Démonstration : a) $\Rightarrow$ b) :

On a : $Y_t + 1 = M_t A_t$, d'où : $M_t = \frac{1}{A_t}(1+Y_t) \leq 1+Y_t$, puisque : $A_t \geq 1$

En conséquence, si Y est de la classe (D), il en est de même de M ;

d'autre part, $M_\infty A_\infty = 1 + Y_\infty$ est intégrable.

b) $\Rightarrow$ a)

On a : $M_t A_t = A_t E[M_\infty | \mathcal{F}_t] \leq E[M_\infty A_\infty | \mathcal{F}_t]$,

et donc, si b) est satisfaite, alors Y est de la classe (D).

Enfin, l'équivalence des points b) et c) est une conséquence de la Proposition suivante.

Proposition 3 : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $M_0 = 1$, et (A_t) processus croissant adapté tel que $A_0 = 1$. On a alors :

$$E(M_\infty A_\infty) = 1 + E\left(\int_0^\infty M_s \, dA_s\right) \qquad (5)$$

(les deux membres pouvant être simultanément finis ou infinis).

Démonstration : Nous en donnons deux :

1ère démonstration : Rappelons que l'on a, grâce à la formule d'Itô :

$$M_t A_t = 1 + \int_0^t A_{s-} \, dM_s + \int_0^t M_s \, dA_s .$$

Il existe donc une suite de t.a $T_n \uparrow \infty$ tels que :

$$E(M_{T_n} A_{T_n}) = 1 + E\left[\int_0^{T_n} M_s \, dA_s\right]$$

Or le membre de gauche est égal à : $E(M_\infty A_{T_n})$, car $(M_t, t\geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable ; il ne reste plus maintenant qu'à appliquer le théorème de Beppo-Lévi pour chacun des deux membres, et on obtient alors l'égalité (5).

2nde démonstration : On a : $E[M_\infty A_\infty] - 1 = E\left[\int_0^\infty M_\infty \, dA_s\right]$

et l'égalité (5) s'obtient en remplaçant dans le membre de droite de l'égalité précédente le processus constant : $(s,\omega) \longrightarrow M_\infty(\omega)$ par sa projection optionnelle qui est : $(M_s(\omega))$ $\square$

3. Le cas particulier où dl_t est porté par $\{s : Y_s = 0\}$.

Dans ce cas particulier, (A_t) et (l_t) sont liés, d'après la formule (2), par la relation :

$$(6) \qquad A_t = \exp(l_t),$$

mais, il y a mieux ; en effet, on montre alors aisément la relation

$$(7) \qquad A_t = \frac{1}{I_t}, \quad \text{où} \quad I_t = \inf_{s \leq t} M_s.$$

On a, en effet, la

Proposition 4 : Soit $Y_t = m_t + l_t$ $(t \geq 0)$ sous-martingale locale continue, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $Y_0 = 0$. Alors, en utilisant les notations du paragraphe 1 ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) dl_t est porté par $\{t : Y_t = 0\}$

b) il existe $(M_t)_{t \geq 0}$ martingale locale continue strictement positive telle que $M_0 = 1$, et que :

$$(8) \qquad Y_t = \frac{M_t}{I_t} - 1, \quad \text{avec } I_t = \inf_{s \leq t} M_s.$$

La martingale locale $(M_t)_{t \geq 0}$ est définie par la formule :

$$(8') \qquad M_t = (Y_t + 1) \exp(-l_t).$$

De plus, la Proposition 2 admet, dans ce cas particulier, la version suivante (Proposition 5) pour l'énoncé de laquelle la notation suivante :

$$X_t = \int_0^t \frac{dM_s}{M_s} \equiv \int_0^t \frac{dm_s}{(1+Y_s)}$$

sera utile.

<u>Proposition 5</u>: Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(Y_t, t \geq 0)$ appartient à la classe (D) ;

b') $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable et $E\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right) <$

c') $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable et $E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] <$

d) $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable, et $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale de carré intégrable.

<u>Démonstration</u>: L'équivalence des points a), b') et c') découle immédiatement de ce que, dans ce cas particulier on a :

$\left(\frac{M_s}{I_s} = 1 \text{ sur } (dI_s > 0)\right)$

$$M_s \, dA_s = M_s \frac{(-dI_s)}{I_s^2} = -\frac{dI_s}{I_s} = d\left(\log \frac{1}{I_s}\right).$$

Il reste à montrer par exemple, l'équivalence de c') et d).

On a, à l'aide de la formule d'Itô :

$$(9) \qquad \log\left(\frac{1}{M_t}\right) = -\int_0^t \frac{dM_s}{M_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^2}.$$

Montrons : d) $\Longrightarrow$ c').

D'après (9), on a :

$$E\left[\sup_{s \leq t} \left|\log \frac{1}{M_s}\right|\right] \leq E\left[\sup_{s \leq t} \left|\int_0^s \frac{dM_u}{M_u}\right| + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^2}\right]$$

$$\leq E\left[\sup_{s \leq t} |X_s|\right] + \frac{1}{2} E\left[\langle X\rangle_t\right]$$

(d'après l'inégalité de Davis) $\leq C \, E\left[\langle X\rangle_t^{1/2}\right] + \frac{1}{2} E\left[\langle X\rangle_t\right]$

$$\leq C\left(E\left[\langle X\rangle_t\right]\right)^{1/2} + \frac{1}{2} E\left[\langle X\rangle_t\right],$$

$$E\langle X\rangle_{T_n} - C\sqrt{E\langle X\rangle_{T_n}} \leq E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right]$$

ce qui entraîne évidemment que la suite $E\langle X\rangle_{T_n}$ est bornée.

$$\log \frac{1}{I_\infty} = \left| \sup_{s\le t} \log \frac{1}{M_s} \right| \le \sup_{s\le t} \left| \log \frac{1}{M_s} \right|$$

ce qui implique à l'évidence le résultat cherché.

Inversement, montrons que : $c') \Longrightarrow d)$.

Toujours d'après (9), et l'inégalité de Davis, on a, pour tout t.a. T :

$$E\left(\langle X\rangle_T\right) \le C\left(\left(E\left[\langle X\rangle_T\right]\right)^{1/2} + E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right]\right)$$

L'existence d'une suite (T_n) de t.a. croissant vers $+\infty$, et tels que : $E\left[\langle X\rangle_{T_n}\right] <$ et des considérations élémentaires sur les trinomes du second degré impliquent alors que :

$$E\left[\langle X\rangle_\infty\right] \le C\left(1 + E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right]\right),$$

ce qui entraîne le résultat cherché □.

Nous terminons ce paragraphe par les quelques remarques suivantes :

1) Dans la démonstration de l'équivalence des propriétés c') et d) de la Proposition 5, on n'a pas utilisé le fait que : $(M_t)_{t\ge 0}$ est une martingale uniformément intégrable. On a donc le résultat suivant :

si $M_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)$, avec $X_0 = 0$, et (X_t) martingale locale contin alors :

$$E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] < \infty \text{ si, et seulement si : } E\left(\langle X\rangle_\infty\right) < \infty.$$

2) On montrerait de la même manière, pour tout $p > 0$, le résultat suivant

$$E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^p\right] < \infty \text{ si, et seulement si : } E\left(\langle X\rangle_\infty^p\right).$$

3) Dans le cours de la démonstration de l'équivalence des propriétés c') et d) de la Proposition 5, on a montré en fait que :

$$E\left[\sup_{t\ge 0} \left|\log \frac{1}{M_t}\right|\right] < \infty \text{ si, et seulement si : } E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] < \infty.$$

Or, on a, à l'évidence : $\sup_{t\ge 0} \left|\log \frac{1}{M_t}\right| = \max\left(\log S_\infty \,;\, \log \frac{1}{I_\infty}\right)$

avec : $S_\infty \equiv \sup_{t\ge 0} M_t$.

Toutefois, pour toute martingale locale positive $(M_t)_{t\geq 0}$, telle que : $M_0 = 1$,
on a, en fait : (10) $P(S_\infty \geq a) \leq \frac{1}{a}$ $(a \geq 1)$.
On tire de cette inégalité (10) le résultat :

$$E\left[(S_\infty)^p\right] \leq c_p < \infty \quad , \text{ pour tout } p<1,$$

et donc : $\log S_\infty$ admet des moments de tous ordres (en fait, même des moments exponentiels)

L'inégalité (10) découle de l'application du théorème d'arrêt à $(M_{t\wedge T_a}, t\geq 0)$
où $T_a \equiv \inf\{t>0 : M_t \geq a\}$.

4) Revenons maintenant à la propriété c') [ou la propriété d)] de la Proposition 5, en remarquant que la propriété pour $M_t \equiv \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)$ d'être une martingale uniformément intégrable n'est ni nécessaire, ni suffisante pour que l'on ait : $E\left(\langle X\rangle_\infty\right) < \infty$.

En effet, rappelons tout d'abord que l'on a, d'après Dubins-Schwarz,

$$X_t = B_{\langle X\rangle_t} \quad (t\geq 0)$$

avec $(B_u, u\geq 0)$ mouvement brownien réel ; en posant $T = \langle X\rangle_\infty$, il s'agit donc de montrer que $M_t \equiv \exp\left(B_{t\wedge T} - \frac{1}{2} t\wedge T\right)$ peut être uniformément intégrable sans que $E(T) < \infty$, et inversement.

En effet, si $T \equiv T_a \equiv \inf\{t : B_t \geq a\}$, avec $a>0$, la martingale locale $(M_t)_{t\geq}$ ci-dessus est uniformément bornée, et donc uniformément intégrable ; cependant, il est bien connu que : $E(T_a) = \infty$ (on a, en fait, $E(T_a^p) < \infty$ si, et seulement si : $p < 1/2$).

Inversement, si on pose : $\sigma_b \equiv \inf\{t : B_t + bt = 1\}$, avec $b>0$,
on a, d'après Revuz-Yor ([ ], Exercice (1.31), p. 311) :

$$E\left[\exp\left(B_{\sigma_b} - \frac{1}{2}\sigma_b\right)\right] < 1,$$

et donc : $M_t = \exp\left(B_{t\wedge\sigma_b} - \frac{1}{2}(t\wedge\sigma_b)\right)$ n'est pas uniformément intégrable bien que σ_b possède des moments exponentiels (voir l'Exercice (1.21), p. 309, de Revuz-Yor [ ]).

5) Enfin, le cas particulier étudié dans ce paragraphe est en fait <u>un cas extrémal</u>, au sens suivant : on suppose la martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$ donnée, et on considère l'ensemble de toutes les sousmartingales $(Y_t)_{t\geq 0}$ de la forme :

$$(1) \qquad Y_t = M_t A_t - 1 ,$$

avec (A_t) processus croissant continu tel que : $A_0 = 1$.

Alors, la <u>plus petite</u> parmi toutes les sousmartingales est :

$$Y_t^* = \frac{M_t}{I_t} - 1 ;$$

la démonstration est laissée au lecteur...

Compléments à :

Décomposition multiplicative d'une sous-martingale continue, et propriété d'intégrabilité.

16 Juillet 1991.

Nous donnons tout d'abord un complément à la Proposition 3.

Corollaire (de la Proposition 3) :

Sous les hypothèses de la Proposition 3, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i)} \quad E(M_\infty A_\infty) < \infty \quad ; \quad \text{(ii)} \quad E\left[\int_0^\infty M_s \, dA_s\right] < \infty$$

Lorsque l'une ou l'autre de ces propriétés est satisfaite, alors la martingale locale

$$(11) \qquad M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s \, dA_s \equiv \int_0^t A_{s-} \, dM_s \qquad (t \geq 0)$$

est en fait une martingale uniformément intégrable.

Démonstration : L'équivalence de (i) et (ii) découle immédiatement de la formule (5) ci-dessus ; en outre, lorsque (i) est satisfaite, on a, a fortiori, pour tout t.a $T (\leq \infty)$:

$$E(M_T A_T) < \infty ,$$

et donc, en appliquant la formule (5) à $(M_{t \wedge T}, A_{t \wedge T})$, on obtient :

$$E(\xi_T) = Cte ,$$

où $\xi_t = M_t A_t - \int_0^t M_s dA_s$.

Cette propriété (d'espérances constantes, lorsque T varie parmi tous les t.a) équivaut à ce que $(\xi_t, t \geq 0)$ soit une martingale u.i □.

Notre objectif est maintenant de déterminer, lorsque les hypothèses du Corollaire ci-dessus sont satisfaites, sous quelles conditions supplémentaires la martingale u.i $\left(\int_0^t A_{s-} dM_s , \ t \geq 0\right)$ est de carré intégrable.

Dans ce but, nous allons étudier l'intégrabilité de $\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s$ au moyen de la Proposition suivante.

Proposition 3' : Soit (M_t) martingale continue uniformément intégrable (à valeurs réelles) telle que $M_0 = 1$, et (A_t) processus croissant continu, adapté, tel que $A_0 = 1$.

On a alors :

$$(12) \qquad E(M_\infty^2 A_\infty^2) = 1 + E\left[\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2E\left[\int_0^\infty M_s^2 A_s \, dA_s\right]$$

Démonstration : D'après la formule d'Itô, le processus :

$$M_t^2 A_t^2 - 1 - \int_0^t A_s^2 \, d\langle M\rangle_s - 2\int_0^t M_s^2 A_s \, dA_s \quad \text{est une martingale locale;}$$

il existe donc une suite $\underset{\text{de t.a.}}{\wedge} T_n \uparrow \infty$ tels que l'on ait :

$$(13) \quad E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) = 1 + E\left[\int_0^{T_n} A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2E\left[\int_0^{T_n} M_s^2 A_s \, dA_s\right]$$

les deux membres étant finis, pour tout n.

D'après le théorème de Beppo-Levi, le membre de droite de (13) croît vers :

$$1 + E\left[\int_0^\infty A_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] + 2E\left[\int_0^\infty M_s^2 A_s \, dA_s\right].$$

Quant au membre de gauche, on a, d'une part, à l'aide du lemme de Fatou :

$$E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) \leq \underline{\lim}_n \, E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right).$$

D'autre part, on a : $M_{T_n} = E\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_{T_n}\right)$, et donc, d'après l'inégalité de Jensen (ou de convexité), on a :

$$E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) \leq E\left(M_\infty^2 A_{T_n}^2\right),$$

et la dernière quantité écrite croît, d'après Beppo Levi, vers $E(M_\infty^2$

On a donc, finalement :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(M_{T_n}^2 A_{T_n}^2\right) = E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right),$$

et la formule (12) découle donc finalement de la formule (13), dans laquelle on fait tendre n vers $+\infty$ $\square$

Remarque : Il peut être intéressant de mettre en évidence, pour d'autres applications éventuelles, le résultat plus général suivant :

si $(Z_t, t\geq 0)$ est une sous-martingale continue de la classe (D), si (C_t) est un processus croissant continu adapté, et si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe, alors, on a :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\varphi(Z_{T_n}) C_{T_n}\right] = E\left[\varphi(Z_\infty) C_\infty\right] (\leq$$

On déduit, par exemple, de ce résultat, de la même façon que ci-dessus, l'identité suivante :

si (M_t) est une martingale continue uniformément intégrable, telle que $M_0 = 1$, si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe, dont la dérivée seconde est une fonction, et si (C_t) est un processus croissant continu, tel que $C_0 = 1$, alors, on a :

$$(14) \qquad E\left[\varphi(M_\infty) C_\infty\right] = 1 + \frac{1}{2} E\left[\int_0^\infty C_s\, \varphi''(M_s)\, d\langle M\rangle_s\right] + E\left[\int_0^\infty \varphi(M_s\right.$$

Une conséquence de la Proposition 3' est le :

Corollaire (de la Proposition 3') : Sous les hypothèses de la Proposition 3', les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) < \infty$;

(ii) $\quad E\left[\left(\int_0^\infty M_s\, dA_s\right)^2\right] < \infty$ et $E\left[\int_0^\infty A_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] <$

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) :

d'après la formule (12), (i) implique : $\quad E\left[\int_0^\infty A_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$

$\Rightarrow M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s dA_s$ martingale bornée dans L^2 $\Rightarrow M_\infty A_\infty - \int_0^\infty M_s dA_s = 1$ ... $(\int_0^\infty M_s \ldots)$

Revenant maintenant à (11), on obtient : $E\left[\left(\int_0^\infty M_s dA_s\right)^2\right] < \infty$, (12)

ce qui montre (ii) ;

(ii) $\Longrightarrow$ (i) est immédiat d'après (11). $\square$

Application au cas particulier où : $A_t = \dfrac{1}{I_t}$.

Le Corollaire de la Proposition 3 devient alors (: ceci est un "déguisement" de la Proposition 5)

Proposition 5' : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que : $M_0 = 1$. On pose $I_t = \inf_{s\leq t} M_s$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i') \quad E\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right) < \infty \quad ; \quad (ii') \quad E\left[\log\frac{1}{I_\infty}\right] < \infty .$$

Si l'une ou l'autre de ces propriétés est réalisée, alors :

$$\left(\frac{M_t}{I_t} - \log\frac{1}{I_t}, \; t\geq 0\right) \text{ est une martingale uniformément intégrable}$$

Proposition 6 : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $M_0 = 1$, et que la propriété (i') (ou (ii')) soit satisfaite.

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(iii) \quad E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty \quad ; \quad (iv) \quad E\left[\left(\log\frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty \; ;$$

$$(v) \quad E\left[\int_0^\infty \frac{d\langle M\rangle_s}{I_s^2}\right] < \infty .$$

Démonstration : (iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Ceci découle de ce que : (i) $\Longrightarrow$ (ii) dans le Corollaire de la Proposition 3', car : $M_s dA_s = \dfrac{-dI_s}{I_s}$, dans notre cas particulier et donc :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty \quad \text{implique :} \quad E\left[\left(\log\frac{1}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty .$$

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v) car la martingale : $\dfrac{M_t}{I_t} - \log\dfrac{1}{I_t}$ s'écrit :

$$1 + \int_0^t \frac{dM_s}{I_s}.$$

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Il nous faut ici remonter à la Proposition 3', formule (12), qui devient, dans le cas particulier :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) = 1 + E\left(\int_0^\infty \frac{d\langle M\rangle_s}{I_s^2}\right) + 2\,E\left(\log\frac{1}{I_\infty}\right).$$

Or $E\left(\log\dfrac{1}{I_\infty}\right) < \infty$ par hypothèse, et donc : (v) $\Longrightarrow$ (iii) $\square$

16 juillet

Quelles sont les principales questions qui restent posées ?

1) Dans la Proposition 6, est ce que :

$$E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^2\right) < \infty \quad \text{équivaut à :} \quad E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^2\right] < \infty$$

2) Comment peut-on caractériser : $E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty$?

3) D'après la Proposition 6, on a :

$$(*) \qquad E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) < \infty \quad \text{ssi :} \quad E\left(\int_0^\infty d\langle M\rangle_s \, A_s^2\right) < \infty$$

dans le cas particulier où : $A_t = \frac{1}{I_t}$.

Est ce que l'équivalence $(*)$ ci-dessus est satisfaite pour tout processus croissant A

4) A quelle condition est ce que, si $f \downarrow$, et si $(M_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable, on a :

$$\left(f(I_t) + f'(I_t)(M_t - I_t), \; t \geq 0\right)$$

uniformément intégrable dès que : $E\left[f(I_\infty)\right] < \infty$

(ou toute autre condition ne faisant intervenir que I_∞).

5) Au regard de mes inégalités de sous-martingales (Stochastics, 1979), les sous-martingales : $\left(\frac{M_t}{I_t} - 1, \; t \geq 0\right)$ jouent-elles un rôle particulier, au sens où il y aurait des inégalités qui seraient vraies dans ce cas, et qui ne le seraient pas pour une sous-martingale ?

[Je ne le pense pas ...].

Réponses aux questions.

Il est peut-être plus naturel de répondre à la Question 2, avant la question 1.

a) Réponse à la Question 2 :

Les sous-martingales $Y_t = m_t + \ell_t \equiv \dfrac{M_t}{I_t} - 1$

que nous avons considérées dans toute cette étude sont appelées sous-martingales de la classe (Σ) dans mon article à Stochastics (1979).

On tire alors de la Proposition a.4. de cet article la

Proposition 7 : Soit $Y_t \equiv m_t + \ell_t$ sous-martingale de la classe $(\Sigma) \cap (D)$.
Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe deux constantes universelles $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que :

$$(15) \qquad c_p \, E\left[|m_\infty|^p\right] \leq E\left[Y_\infty^p\right] \leq C_p \, E\left[|m_\infty|^p\right].$$

Corollaire (de la Proposition 7) : Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ martingale à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, uniformément intégrable, telle que $M_0 = 1$.
On suppose en outre que $E\left(\dfrac{M_\infty}{I_\infty}\right) < \infty$, ou, de manière équivalente : $E\left[\log \dfrac{1}{I_\infty}\right] < \infty$.
Alors, c_p et C_p désignant les mêmes constantes universelles que dans la Proposition 7, on a ; pour $p \in]1, \infty[$:

$$(15') \qquad c_p \, E\left[\left|\log \frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right|^p\right] \leq E\left(\left|\frac{M_\infty}{I_\infty} - 1\right|^p\right)$$
$$\leq C_p \, E\left(\left|\log \frac{1}{I_\infty} - \frac{M_\infty}{I_\infty}\right|^p\right)$$

Démonstration : Les hypothèses faites dans l'énoncé de ce Corollaire impliquent, d'après la Proposition 5, que : $Y_t \equiv \dfrac{M_t}{I_t} - 1$ est de la classe $(\Sigma) \cap (D)$

b) Réponse à la question 1.

On vient de voir, que sous les hypothèses de la Proposition 7 (ou plutôt de son Corollaire) l'hypothèse : $E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty$ implique : $E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^p\right] < \infty$.

Nous allons voir que l'implication réciproque :

$$E\left[\left(\log \frac{1}{I_\infty}\right)^p\right] < \infty \text{ "}\Longrightarrow\text{" } E\left(\left(\frac{M_\infty}{I_\infty}\right)^p\right) < \infty$$

n'est pas nécessairement vraie ;

pour cela, il suffit de construire une sous martingale $Y_t = m_t + \ell_t$ de la classe $(\Sigma) \cap (D)$ telle que : $E(\ell_\infty^p) < \infty$,

mais que : $E\left(|m_\infty|^p\right) = \infty$

Or, on peut écrire une telle sous-martingale sous la forme :

$$Y_t = \tilde{s}_t - \tilde{m}_t, \text{ avec : } \tilde{s}_t = \sup_{s \le t} (\tilde{m}_s)$$

Nous allons prendre : $\tilde{m}_t = B_{t \wedge T_\mu}$, $\tilde{s}_t = S_{t \wedge T_\mu}$,

où $T_\mu = \inf\{t : S_t \geq \Psi_\mu(B_t)\}$, avec la mesure de proba μ admettant un moment d'ordre 1, et satisfaisant de plus :

$$\int_0^\infty t^p \, d\mu(t) < \infty, \text{ mais : } \int_{-\infty}^0 |t|^p \, d\mu(t) = \infty.$$

Dans ce cas, d'après le Théorème 2.2, p. 630, de notre article dans le Séminaire XIII, on sait que :

$$E\left(S_{T_\mu}^p\right) < \infty, \text{ et } E\left(|B_{T_\mu}|^p\right) = \infty$$

C'est exactement ce que l'on cherchait.

Exercice : Expliciter (M_t) dans cet exemple. | $M_t = \frac{1+Y_t}{A_t} = (1+Y_t)\,e^{-\ell_t}$
$= (1+Y_t)\,e^{-\tilde{s}_t} = (1+\tilde{s}_t - \tilde{m}_t)\,e^{-\tilde{s}_t}$

c) Je ne sais pas répondre à la question 3.

En toute généralité, d'après la Proposition 3', on a :

$$E\left(M_\infty^2 A_\infty^2\right) < \infty \implies E\left[\int_0^\infty d\langle M\rangle_s A_s^2\right] < \infty .$$

Je voudrais montrer que l'implication inverse n'est pas nécessairement vraie ...

d) Réponse à la question 4.

e) Réponse à la question 5.

Les sous-martingales $\left(\frac{M_t}{I_t} - 1\right)$ ne jouent aucun rôle particulier dans les éléments de la classe (Σ), car toute telle sous-martingale peut être représentée sous cette forme. Cette question 5 était une mauvaise question !!

Réponse à la question 4 :

Si f est une fonction décroissante telle que $f(1) = 0$,

si de plus elle est convexe, avec $f''(x) \geq 0$ (i.e. f'' est une fonction),

$$f'(1) = -1 ,$$

alors, pour que $\left(f(I_t) + f'(I_t)(M_t - I_t) , \; t \geq 0 \right)$

soit une martingale uniformément intégrable, il est suffisant que :

$$(16) \qquad E\left[-f'(I_\infty) M_\infty \right] < \infty .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le Corollaire de la Proposition 3 à $A_t = -f'(I_t)$

ce qui donne :

$$M_t A_t - 1 - \int_0^t M_s \, dA_s = -f'(I_t) M_t - 1 + \int_0^t I_s f''(I_s) \, dI_s$$

est une martingale uniformément intégrable dès que (16) est vérifiée ;

or, on a :
$$\int_0^t I_s f''(I_s) \, dI_s = -F(I_t) ,$$

où : $F(x) = \int_x^1 dy \, y f''(y) \qquad (x \leq 1)$.

Or, on a : $f(1) - f(x) = -f(x) = \int_x^1 dy \, f'(y)$

$$= \int_x^1 dy \, (f'(y) - f'(1)) + f'(1)(1-x)$$

$$= -\int_x^1 dy \int_y^1 dz \, f''(z) + (x-1)$$

$$= -\int_x^1 dz\, f''(z)(z-x) \quad + (x-1)$$

$$= -\int_x^1 dz\, f''(z)\, z \quad + x\left(f'(1) - f'(x)\right)$$

$$= -F(x) - x f'(x) - 1,$$

c'est à dire : $\boxed{F(x) = f(x) - x f'(x) - 1.}$ (17)

Une condition équivalente à (16) est donc (toujours d'après le Corollaire de la Proposition 3) :

(18) $\qquad E\left(F(I_\infty)\right) < \infty.$

condition qui, d'après (17) se ramène à :

(18') $\qquad E\left[f(I_\infty)\right] < \infty$ et $E\left[I_\infty\left(-f'(I_\infty)\right)\right] <$

Par ailleurs, Bisme a posé la question 6) suivante :

Est-ce que l'on peut avoir (M_t) unif. intégrable, et $E\left[\log \frac{1}{I_\infty}\right] =$

La réponse est Oui, car ~~$\exists$~~ Cela équivaut à :

(M_t) unif intégrable et $E\left[\langle X\rangle_\infty\right] = \infty$;

Or Ceci est réalisé avec : $M_t = \exp\left(B_{t\wedge T_1} - \frac{1}{2}(t\wedge T_1)\right)$.

$T_1 = \inf\{t,\ B_t = 1\}$, $\quad X_t = B_{t\wedge T_1}$