Deux familles d'ensembles saturés.

(2 Juillet 1991).

1) ~~En~~ En comparant le mouvement brownien et son temps local en 0.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, et $(\ell_t, t \geq 0)$ son temps local en 0.
Remarquons que, si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante, de classe C^1, qui tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$, alors la martingale locale :

$$M_t = f(\ell_t) - |B_t|\, f'(\ell_t)$$

est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et tend vers 0 lorsque $t \longrightarrow \infty$.
En conséquence, on sait que :

$\{t ; M_t \geq a\}$ est un ensemble saturé, dès que $a \leq f(0)$.

On en déduit la :

Proposition 1 : Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne telle que :

(1) $$\int_0^\infty \frac{dx}{g(x)} < \infty .$$

Alors,

$$\boxed{\{t : |B_t| \geq g(\ell_t)\} \text{ est un ensemble saturé.}}$$

Démonstration : On applique la remarque précédente avec :

$$f(\ell) = 1 - \exp\left(-\int_\ell^\infty \frac{dx}{g(x)}\right)$$

On a alors :
$$M_t = 1 - \exp\left(-\int_{\ell_t}^\infty \frac{dx}{g(x)}\right) + |B_t| \frac{1}{g(\ell_t)} \exp\left(-\int_{\ell_t}^\infty \frac{dx}{g(x)}\right),$$

d'où l'on déduit : $\{t : M_t \geq 1\} \equiv \{t : |B_t| \geq g(\ell_t)\}$,

ce qui implique le résultat cherché $\square$

Une variante de cet exemple est obtenue en remplaçant $|B_t|$ par $(\cancel{\tfrac{1}{2}} B_t^+)$;

On obtient alors la martingale :

$$M_t^{(+)} = \frac{1}{2} f(\ell_t) - \cancel{\tfrac{1}{2}} B_t^+ f'(\ell_t) ,$$

et donc, sous les mêmes conditions que précédemment, on a :

$$\left\{ t : B_t^+ \geq g(\ell_t) \right\} \equiv \left\{ t : B_t \geq g(\ell_t) \right\}$$

qui est un ensemble saturé.

Bien entendu, on obtient d'autres variantes en remplaçant le couple $(|B_t|, \ell_t)$ par : $(S_t - B_t ; S_t)$;

pour d'autres variations sur ce même thème, voir également ma lettre à Dubins et Emery, du 28 Septembre 1989.

2) Relations avec les fonctions harmoniques d'espace-temps.

(L'idée ici est la même ; c'est à dire que l'on considère le couple (B_t, t) au lieu du couple (B_t, ℓ_t) ; d'une certaine manière, le rôle des martingales "usuelles" du balayage est maintenant tenu par les martingales : $f(B_t, t)$, avec f fonction harmonique d'espace temps ;

Généralisation : On pourrait bien sûr penser généraliser les résultats des paragraphes 1) et 2) en considérant des martingales associées au processus de Markov $f(B_t, A_t)$, pour (A_t) fonctionnelle additive.).

Je reprends les notations de l'Exercice (3.17), p. 145, de Revuz-Yor, lui-même intimement inspiré de :

Robbins-Siegmund: Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums. Ann. Math. Stat. 41 (1970), p. 1410-1429.

Soit μ une mesure $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que la fonction :

$$f_\mu(x,t) = \int_0^\infty \mu(dy) \exp\left(yx - \frac{y^2 t}{2}\right)$$

ne soit pas identiquement infinie.

Remarquons alors que la martingale locale :

$$M_t^{(\mu)} \equiv f_\mu(B_t, t)$$ satisfait les bonnes conditions,

c'est à dire : $M_t^{(\mu)} \xrightarrow[(t\to\infty)]{} 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, définissons la fonction déterministe :

$$A_\varepsilon(t) = \inf\{x : f_\mu(x,t) \geqslant \varepsilon\},$$

et $g_{\mu,\varepsilon} \equiv g \equiv \sup\{t : B_t \geqslant A_\varepsilon(t)\}$.

Remarquons que : $\{g \geqslant t\} \equiv \left\{\sup_{u \geqslant t} (B_u - A_\varepsilon(u)) \geqslant 0\right\}$

$$\equiv \left\{\sup_{u\geqslant t}\left(\frac{M_u^{(\mu)}}{\varepsilon}\right) \geqslant 1\right\},$$

d'où : $P\{g \geqslant t \mid \mathcal{F}_t\} = 1 \wedge \left(\frac{f_\mu(B_t,t)}{\varepsilon}\right)$,

et donc, finalement, l'ensemble :

$$\boxed{\{t : B_t \geqslant A_\varepsilon(t)\} \equiv \{t : f_\mu(B_t,t) \geqslant \varepsilon\} \text{ est saturé.}}$$

Il y a bcp d'exemples intéressants à donner, en choisissant des fctns $A_\varepsilon(t)$ explicites (regarder du Robbins - Siegmund).