Deux sous-filtrations de la filtration du drap brownien

23 Septembre 90.

Soit $(W_{s,t}\,;\, s \geq 0, t \geq 0)$ un drap brownien, et $\mathcal{F}_{a,b} \equiv \sigma\{W_{s,t}\,;\, s \leq a, t \leq b\}$ la filtration engendrée par W;
en [DD], on a défini la sous-filtration $(\mathcal{G}_{a,b}\,;\, a \geq 0, b \geq 0)$ de $(\mathcal{F}_{a,b}\,;\, a \geq 0, b \geq 0)$ de la façon suivante :
pour a et b fixés, $\mathcal{G}_{a,b}$ est la tribu engendrée par les variables

$\iint_{R_{a,b}} f(u,v)\, dW_{u,v}$ indépendantes de (ou : orthogonales à)

$$W_{\partial R_{a,b}} \equiv \{ W_{s,b}\ (s \leq a)\,;\, W_{a,t}\ (t \leq b) \}$$

Il a ensuite été remarqué en [DD] que $(\mathcal{G}_{a,b})$ est la filtration naturelle du drap brownien :

$$(1) \qquad \xi_{s,t} \equiv W_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} W_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} W_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} W_{u,v}$$

D'autre part, en nous inspirant à la fois de notre travail pour le mouvement brownien réel [JY] et de l'article de Föllmer [F], il nous a semblé naturel d'introduire les deux draps browniens :

$$(2) \qquad W^{(1)}_{s,t} \equiv W_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} W_{u,t} \quad ; \quad W^{(2)}_{s,t} \equiv W_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} W_{s,v}$$

Nous remarquons maintenant que ξ peut s'écrire de deux manières différentes, en fonction de $W^{(1)}$ d'une part, et de $W^{(2)}$, d'autre part ;
en effet, on a :

$$(3) \qquad \xi_{s,t} \equiv W^{(1)}_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} W^{(1)}_{s,v} \equiv W^{(2)}_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} W^{(2)}_{u,t} .$$

Introduisons maintenant $\mathcal{G}^{(i)}_{a,b} = \sigma\{W^{(i)}_{s,t}\ ;\ s \le a,\ t \le b\}$, $i = 1,2$,

et $\mathcal{H}^{-}_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$, puis $\mathcal{H}^{+}_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$.

Nous montrons maintenant la

Proposition 1 : 1) $\mathcal{H}^{+}_{a,b}$ est la tribu engendrée par les variables de l'espace gaussien $(W_{s,t}\ ;\ s \le a,\ t \le b)$, indépendantes de (ou orthogonales à) la variable $W_{a,b}$;

2) $\mathcal{G}_{a,b} = \mathcal{H}^{-}_{a,b}$ (?).

Démonstration : 1) Il suffit de montrer que, si $f \in L^2(R_{a,b}\ ;\ du\,dv)$ est telle que :

(4)
$$E\left[\left(\iint_{R_{a,b}} f(u,v)\, dW_{u,v}\right) W^{(i)}_{s,t}\right] = 0,$$

pour tous $s \le a$, et $t \le b$, et $i = 1,2$, alors f est constante.

Or, on peut réécrire (4), pour $i = 1$, sous la forme :

$$\int_0^s dh \int_0^t dv\, f(h,v) - \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^u dh \int_0^t dv\, f(h,v) = 0,$$

soit, en dérivant par rapport à s, puis par rapport à t :

$$f(s,t) = \frac{1}{s} \int_0^s dh\, f(h,t) \qquad , \ ds\,dt \text{ p.s.}$$

Il n'est alors pas difficile de déduire de ce résultat que f ne dépend ~~pas~~ que de t, puis, par symétrie, que f est constante.

2) Il découle immédiatement du fait que $\mathcal{G}_{a,b} \equiv \sigma\{\xi_{s,t}\,;\, s \leq a,\, t \leq b\}$ et des formules (3) que l'on a :

$$\mathcal{G}_{a,b} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \mathcal{H}^-_{a,b}.$$

Il nous reste à montrer l'inclusion inverse ; pour cela, nous nous appuyons sur les descriptions suivantes de $\mathcal{G}^{(1)}_{a,b}$ et $\mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$:

$$\mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)\,dW_{u,v}\,,\ \text{indépendante de } (W_{a,t}\,;\, t \leq b)\right\}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)\,dW_{u,v}\,,\ \text{indépendante de } (W_{s,b}\,;\, s \leq a)\right\}$$

(?) En conséquence, on a :

$$\mathcal{H}^-_{a,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} = \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)\,dW_{u,v}\,,\ \text{indépendante de } W_{\partial R_{a,b}}\right\}$$

et donc, par définition de $\mathcal{G}_{a,b}$:

$$\mathcal{H}^-_{a,b} = \mathcal{G}_{a,b}. \qquad \square$$

Nous avons rappelé ci-dessus que $(\mathcal{G}_{a,b}\,;\, a \geq 0, b \geq 0)$ est la filtration naturelle d'un drap brownien ; nous allons maintenant montrer la

Proposition 2 : $(\mathcal{H}^+_{a,b}\,;\, a \geq 0, b \geq 0)$ n'est pas la filtration naturelle d'un Drap brownien, car elle ne vérifie pas la propriété (F4), c'est à dire : $\mathcal{H}^+_{\infty,b}$ et $\mathcal{H}^+_{a,\infty}$ ne sont pas conditionnellement indépendantes, sachant $\mathcal{H}^+_{a,b}$.

Démonstration : Il découle de [JY] que, pour tout t fixé, on a :

$$\sigma\{W_{s,t} ; s \geq 0\} = \sigma\{W^{(1)}_{s,t} ; s \geq 0\},$$

et donc : $\mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} = \sigma\{W_{s,t} ; s \geq 0, t \leq b\} = \mathcal{F}_{\infty,b}$,

ce qui implique que : $\mathcal{H}^{+}_{\infty,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{\infty,b} = \mathcal{F}_{\infty,b}$.

Par symétrie, on a : $\mathcal{H}^{+}_{a,\infty} = \mathcal{F}_{a,\infty}$.

En conséquence, la variable $W_{a,b}$ est mesurable à la fois par rapport à $\mathcal{H}^{+}_{a,\infty}$ et $\mathcal{H}^{+}_{\infty,b}$, et est indépendante de $\mathcal{H}^{+}_{a,b}$ (d'après la proposition 1).

La propriété (F4) n'est donc pas réalisée pour la filtration $(\mathcal{H}^{+}_{a,b} ; a \geq 0, b \geq 0)$ □

Références:

[DD] Une décomposition non canonique du drap brownien (1^er^ Février 90).

[JY] T. Jeulin, M. Yor:

[F] H. Föllmer: Martin boundaries on Wiener space. Preprint (1990).