# Discussion de certaines inégalités de martingales

M. Yor (13 Novembre 90).

Dans toute la suite, on considère $(N_t, t \geq 0)$ martingale locale continue, issue de $0$, définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, vérifiant les conditions habituelles,
et $M_t = \int_0^t H_s \, dN_s$, $t \geq 0$, où $H$ est un processus prévisible tel que $|H$

1. L'objet de ce texte est de discuter sous quelles conditions sur $M$ et $N$ la famille d'inégalités :

$$(*) \qquad E\left[ f\left(\exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\right)\right] \leq E\left[ f\left(\exp\left(N_t - \frac{1}{2}\langle N\rangle_t\right)\right)\right]$$

est satisfaite pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, et tout $t \geq 0$.
Nous commençons par un résultat tout à fait négatif

**Proposition 1 :**

Si l'inégalité $(*)$ est satisfaite pour $t = 1$, pour toute $f$ convexe, et tout processus prévisible $H$ tel que : $|H| \leq 1$, et si, de plus, on a : $N_1(\omega) \leq C$, $P$ p.s,
alors le processus $(N_u, u \leq 1)$ est identiquement nul.

Démonstration : On considère les inégalités $(*)$, avec $f(x) = x^p$, pour $p \geq$
On a donc, par hypothèse :

$$\left\| \exp\left(M_1 - \frac{1}{2}\langle M\rangle_1\right)\right\|_p \leq \left\| \exp\left(N_1 - \frac{1}{2}\langle N\rangle_1\right)\right\|_p,$$

soit, en faisant tendre $p$ vers $+\infty$ :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \exp\left(M_1(\omega) - \frac{1}{2}\langle M\rangle_1(\omega)\right) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \exp\left(N_1(\omega) - \frac{1}{2}\langle N\rangle_1\right.$$

ou encore :

Alors, l'inégalité (*) est satisfaite, pour toute fonction convexe $f$.

Démonstration : dans le cas (5.i), on écrit : $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$, $t \geq 0$, et $(B_u, u \geq 0)$ est un $(\hat{\mathcal{F}}_u \equiv \mathcal{F}_{\tau_u}, u \geq 0)$ mouvement brownien, où $(\tau_u, u \geq 0)$ désigne l'inverse du processus croissant $(\langle M\rangle_t, t \geq 0)$.
On a alors :

$$\exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) = E\left[\exp\left(B_{n(t)} - \frac{1}{2}n(t)\right) \Big| \hat{\mathcal{F}}_{\langle M\rangle_t}\right],$$

et donc, par Jensen :

$$E\left[f\left(\exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\right)\right] \leq E\left[f\left(\exp\left(B_{n(t)} - \frac{1}{2}n(t)\right)\right)\right]$$

Or, on a : $(N_t, t \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (B_{n(t)}, t \geq 0)$, ce qui implique (*).

La démonstration sous l'hypothèse (5.ii) est tout à fait semblable □

Nous donnons encore d'autres exemples de couples $(M, N)$ satisfaisant (*)..

(1) $$\operatorname{ess\,sup}_{\omega} \left( M_1(\omega) - \frac{1}{2} \langle M \rangle_1(\omega) \right) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\omega} \left( N_1(\omega) - \frac{1}{2} \langle N \rangle_1(\omega) \right)$$

En conséquence, on a :

(2) $$\operatorname{ess\,sup}_{\omega} \left( M_1(\omega) - \frac{1}{2} \langle M \rangle_1(\omega) \right) \leq C$$

Considérons maintenant $T_n \equiv \inf\{t : \langle N \rangle_t \geq n\}$ ;

de l'inégalité : $\langle M \rangle_{t \wedge T_n} \leq \langle N \rangle_{t \wedge T_n} \leq n$, et de (2),

il découle, pour tout processus $H$ prévisible tel que : $|H| \leq 1$,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\omega} \left( \int_0^1 H_s \, dN_s^{T_n} \right) \leq C + \frac{n}{2} \equiv C_n$$

Fixons maintenant $n$, et posons : $\tilde{N}_t \equiv N_t^{T_n} \equiv N_{T_n \wedge t}$.
On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $k$-uplet $(h_1, \dots, h_k)$ de rationnels :

(3) $$\sum_{j=1}^{k-1} h_j \left( \tilde{N}_{t_{j+1}} - \tilde{N}_{t_j} \right)(\omega) \leq C_n \,, \quad P\ p.s.$$

Or, pour tout $k$-uplet de réels $(a_1, \dots, a_k)$, on a :

$$\sup_{\substack{h_j \text{ rationnels}, \\ |h_j| \leq 1}} \left( \sum_{j=1}^{k} h_j a_j \right) = \sum_{j=1}^{k} |a_j|$$

On déduit donc de (3) que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} |\tilde{N}_{t_{j+1}} - \tilde{N}_{t_j}| \leq C_n$, $P$ p.s.

En considérant maintenant une suite de subdivisions $\tau_n = (t_1^n < \dots < t_k^n)$ à temps rationnels, dont le pas tend vers 0, on obtient finalement en utilisant la continuité de $\tilde{N}$, et l'approximation classique de $\langle \tilde{N} \rangle_1$ au moyen des variations quadratiques, que : $\langle \tilde{N} \rangle_1 = 0$,
puis, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, il vient : $\langle N \rangle_1 = 0$, et donc $N_u = 0$, pour $u$

La Proposition 1 est satisfaisante du point de vue théorique, mais elle n'est pas "constructive" au sens suivant : si $(N_u, u \leq 1)$ est une martingale telle que $N_1(\omega) \leq C$, $P$ p.s., on aimerait exhiber un processus prévisible $H$ tel que $|H| \leq 1$, et que l'inégalité $(*)$ ne soit pas satisfaite pour certaines fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexes.
Nous allons réaliser ce programme avec :

$$N_t = B_{T_a \wedge t}, \quad t \leq 1, \quad \text{où } T_a \equiv \inf\{t : |B_t| \geq a\}.$$

D'après l'inégalité (2) ci-dessus, si $(M_t, t \leq 1)$ satisfaisait $(*)$, pour toute fonction convexe, on aurait alors :

$$(4) \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} M_1(\omega) \leq a + \frac{1}{2}.$$

Or, si l'on prend : $M_t = \int_0^{t \wedge T_a} 1_{(B_s < 0)} dB_s$, on a, d'après la formule de Tanaka :

$$B^-_{t \wedge T_a} = -M_t + \frac{1}{2} L_{t \wedge T_a},$$

où $(L_t, t \geq 0)$ est le temps local en 0 du mouvement brownien.
On aurait donc, d'après (4) :

$$\frac{1}{2} L_{1 \wedge T_a} - B^-_{1 \wedge T_a} \leq a + \frac{1}{2},$$

soit :

$$L_{1 \wedge T_a} \leq 2\left\{\left(a + \frac{1}{2}\right) + B^-_{1 \wedge T_a}\right\}$$

$$\leq 4a + 1, \quad \text{ce qui n'est pas.} \qquad \square$$

2\. Inversement, il existe certains couples $(M, N)$ tels que $(*)$ soit satisfaite. En effet, on a la

<u>Proposition 2</u> : <u>Supposons que</u> :

$$(5) \qquad \langle M \rangle_t \leq \langle N \rangle_t, \quad \text{pour tout } t,$$

<u>et que, de plus</u> :

(5.i) <u>ou bien</u> : $(\langle N \rangle_t \equiv n(t), t \geq 0)$ soit déterministe,

(5.ii) <u>ou bien</u> : $(\langle M \rangle_t \equiv m(t), t \geq 0)$ soit déterministe, et $(\exp(N_t - \frac{1}{2}\langle N \rangle_t), t \geq 0)$ est une martingal

(Suite de la discussion).

3. On peut faire une discussion analogue à celle des Propositions 1 et 2 en ce qui concerne les inégalités "potentielles" :

$$(**) \qquad \|M_1\|_p \leq C_p \|N_1\|_p$$

où $M_t = \int_0^t H_s \, dN_s$ , avec $H$ processus prévisible tel que : $|H| \leq 1$.

De façon précise, on a la

Proposition 3 : Si l'inégalité (**) est satisfaite pour tout $p > 1$, et tout processus prévisible $H$ tel que $|H| \leq 1$, et si :

$$(6) \qquad \varlimsup_{p \to \infty} C_p < \infty$$

et

$$(7) \qquad |N_1(\omega)| \leq C \ , \ P \, p.s. \, ,$$

alors le processus $(N_u, u \leq 1)$ est identiquement nul.

Démonstration : La méthode de Laplace montre que :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \left| \int_0^1 H_s \, dN_s \right| \leq \gamma \qquad P \, p.s. \, ,$$

où $\gamma = \left( \varlimsup_{p \to \infty} C_p \right) C$ ,

et on déduit alors des mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration de la Proposition 1 que $N_u = 0$, pour tout $u \leq 1$. □

Remarquons toutefois que, en toute généralité, il existe des constantes universelles $C_p$ telles que (**) soit satisfaite pour toute martingale $N$ bornée dans $L^p$ mais, bien sûr, la condition (6) ne sera pas satisfaite.

Evaluons l'ordre de grandeur de telles constantes $C_p$, lorsque $p \to \infty$ ; pour cela, on a, d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\|M_1\|_p \leq a_p \|\langle M\rangle_1^{1/2}\|_p \leq a_p \|\langle N\rangle_1^{1/2}\|_p \, ,$$

et, d'autre part : $\|\langle N\rangle_1^{1/2}\|_p \leq b_p \|N_1^*\|_p \leq b_p \left(\frac{p}{p-1}\right) \|N_1\|_p$ (d'après Doob)

On a donc, finalement :

$$\|M_1\|_p \leq C_p \|N_1\|_p, \quad \text{où} \quad C_p = a_p b_p \left(\frac{p}{p-1}\right),$$

les constantes $a_p$ et $b_p$ pouvant être choisies comme les meilleures possibles dans les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\|M_1\|_p \leq a_p \|\langle M_1\rangle^{1/2}\|_p \quad \text{et} \quad \|\langle M\rangle_1^{1/2}\|_p \leq b_p \|M_1^*\|_p .$$

Or, on sait, essentiellement grâce aux travaux de B. Davis [1] (mais, voir aussi Barlow-Yor [2], Proposition (4.2), p. 207, et Jacka-Yor [3], Theorem 11) que l'on a :

$$a_p = O(\sqrt{p}) \quad \text{et} \quad b_p = O(\sqrt{p}),$$

et donc : (8) $\boxed{C_p = O(p)}$ $(p \to \infty)$.

Quelques questions se posent maintenant naturellement :

- Il serait intéressant de savoir si cette estimation (8) est la meilleure possible ; cela a-t-il une relation avec les inégalités de Khintchine ? ; il y a peut être des études de Burkholder sur cette question (voir son Cours de St Flour)
- En admettant que l'estimation (8) soit la meilleure possible, si l'on suppose que (**) est satisfaite avec des constantes $C_p = O(p^\alpha)$, $p \to \infty$ et $\alpha < 1$, et que, de plus, $|N_1| \leq C$, le processus $(N_u, u \leq 1)$ est-il identiquement nul ??
- Revenons à (*), et supposons $N$ convenablement intégrable ; existe-t-il des constantes $\gamma_p$ telles que

$$\left\|\exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\right\|_p \leq \gamma_p \left\|\exp\left(N_t - \frac{1}{2}\langle N\rangle_t\right)\right\|_p \ ?$$

Si oui, quel est l'ordre de grandeur de ces constantes lorsque $p \to \infty$ ? (voir peut être les travaux de Kazamaki sur les martingales exponentielles ...)

4. Enfin, il existe une proposition analogue à la Proposition 2.

<u>Proposition 4</u> : Supposons que :

(9) $$\langle M\rangle_t \leq \langle N\rangle_t \quad , \text{ pour tout } t ,$$

et que, de plus :

(9.i) ou bien : $\langle N\rangle_t \equiv n(t)$ , $t\geq 0$ , soit déterministe,

(9.ii) ou bien : $\langle M\rangle_t \equiv m(t)$, $t\geq 0$,

soit déterministe, et $(N_t, t\geq 0)$ est une martingale convenablement intégrable.

Alors, pour toute fonction convexe $f$, on a : $E[f(M_1)] \leq E[f(N_1)]$

C'est la ~~méthode~~ même démonstration, mutatis mutandis, que celle de la Proposition 2

<u>Références</u> :

[1] <u>B. Davis</u> : On the $L^p$-norms of stochastic integrals and other martinga[les]. Duke Math. J. <u>43</u> (1976), 697-704.

[2] <u>M.T. Barlow</u>, <u>M. Yor</u> : Semi-martingale inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey lemma, and applications to local times. Journal of Funct. Anal., vol. 49, n° 2, p. 198-229 (1

[3] <u>S. Jacka</u>, <u>M. Yor</u> : Inequalities for non-moderate functions of a pair of processes. Submitted to Trans. Amer. Math. Soc (1990)