Etude des lois des variables $\int_0^t ds\, \varphi(\ell_s)$.

$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne, et $(\ell_s, s \geq 0)$ désigne le temps local en 0 du mouvement brownien réel issu de 0.

On montre facilement, à l'aide de la théorie des excursions, la formule générale suivante

$$\int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, E\left[\exp\left(-\int_0^t du\, \varphi(\ell_u)\right)\right]$$

$$(1) \qquad = \int_0^\infty ds \left(\frac{2}{\lambda+\varphi(s)}\right)^{1/2} \exp\left(-\int_0^s dv\, \left(2(\lambda+\varphi(v))\right)^{1/2}\right)$$

Dans le cas particulier où $\varphi(\ell) = \mu \ell^k$, on obtient :

$$\int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, E\left[\exp\left(-\mu \int_0^t ds\, (\ell_s)^k\right)\right]$$

$$(1)_k \qquad = \frac{1}{k}\int_0^\infty \left(x^{\frac{1}{k}-1}\right) dx \left(\frac{2}{\lambda+\mu x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{k}\int_0^x dy\, y^{\frac{1}{k}-1}\left(2(\lambda+\mu y)\right)^{1/2}\right).$$

$\boxed{\text{Etude pour } k=2.}$ Revenons simplement à la formule (1), et faisons le changement de variables : $s = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot x \equiv \theta x$, et $v = \theta y$.

Le second terme de (1) apparait alors comme :

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \exp\left(-\theta\sqrt{2\lambda}\int_0^x dy\, \sqrt{1+y^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^\infty d\xi\, \exp\left(-\theta\sqrt{2\lambda}\int_0^\xi d\eta\, (\operatorname{ch}\eta)^2\right),$$

grâce au changement de variables $x = \operatorname{sh}(\xi)$.

Ecrivons $f(\xi) = \int_0^\xi d\eta\, (\operatorname{ch}\eta)^2$, et désignons par g la fonction inverse de f.

Le second membre de (2) devient, en posant : $\xi = g(z)$:

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\infty dz \, g'(z) \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\mu}} \lambda z\right) = \int_0^\infty dt \, g'\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}} t\right) \exp(-\lambda t).$$

Par injectivité de la transformation de Laplace, on a donc obtenu :

$$(3) \qquad E\left[\exp\left(-\mu \int_0^t ds \, \ell_s^2\right)\right] = g'\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot t\right).$$

Remarquons que : $\displaystyle\int_0^t ds \, (\ell_s)^2 \overset{(\text{loi})}{=} t^2 . \int_0^1 ds \, \ell_s^2$,

ce qui est bien cohérent avec le fait que le membre de droite de (3) soit une fonction de (μt^2).

On peut donc, sans perte de généralité, écrire (3) pour $t = 1$:

$$(3)_{t=1} \qquad E\left[\exp\left(-\mu \int_0^1 ds \, \ell_s^2\right)\right] = g'\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}\right).$$

g étant la fonction inverse de $f(\xi) = \displaystyle\int_0^\xi dx \, (\mathrm{ch}\, x)^2$, on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{(\mathrm{ch}(g(y)))^2} = \frac{2}{1 + \mathrm{ch}(2g(y))},$$

et donc, en posant : $\mu = \frac{\nu^2}{2}$, il vient :

$$(4) \qquad \boxed{E\left[\exp\left(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^1 du \, \ell_u^2\right)\right] = \frac{2}{1 + \mathrm{ch}\left(2g\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)}}.$$

Etude pour k général

On pose, pour simplifier l'écriture, $a = 1/k$.

L'expression $(1)_k$ peut être transformée, au moyen de changements de variables élémentaires en :

$$a(2^{3/2})\left(\frac{\lambda^{a-1/2}}{\mu^a}\right)\int_0^\infty \frac{dx\; x^{2a-1}}{(1+x^2)^{1/2}} \exp\left(-a.(2^{3/2})\left(\frac{\lambda^{a+1/2}}{\mu^a}\right)\int_0^x dy\; y^{1+2(a-1)}\left(\sqrt{1+y^2}\right)\right.$$

$$\boxed{= a(2^{3/2})\left(\frac{\lambda^{a-1/2}}{\mu^a}\right)\int_0^\infty d\xi \left((\mathrm{sh}\,\xi)^{2a-1}\right) \exp\left(-a(2^{3/2})\left(\frac{\lambda^{a+1/2}}{\mu^a}\right) f_a(\xi)\right),}$$

où l'on a posé : $x = (\mathrm{sh}\,\xi)$, $y = (\mathrm{sh}\,\eta)$, et $f_a(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\xi d\eta\, (\mathrm{ch}^2\eta)(\mathrm{sh}\,\eta)^{2a-1}$.