Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel.

(Ebauche)

1. Sur la représentation de Lévy-Khintchine des carrés de processus de Bessel.

(1.0) Notations. Sauf précision contraire, les distributions dont il est question dans cette Note sont définies sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, espace des fonctions continues $\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, muni de la tribu engendrée par le processus $(\omega(t), t \geq 0)$.
$\mathcal{F}$ désigne l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, boréliennes, positives, bornées, à support compact. Pour $f \in \mathcal{F}$, $\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, et $u \geq 0$, on note f_u la fonction $(f_u(t) = f(u+t), t \geq 0)$ et $\langle \omega, f \rangle = \int_0^\infty dt\, \omega(t) f(t)$.

(1.1) Pour tout $\delta, x \geq 0$, Q_x^δ désigne la distribution du carré, issu de x, du processus de Bessel de dimension δ, le point 0 étant pris, pour $0 < \delta < 2$, comme barrière instantanément réfléchissante.
Shiga et Watanabe [ ] ont remarqué la propriété d'additivité :

$$(1.a) \qquad Q_x^\delta \oplus Q_{x'}^{\delta'} = Q_{x+x'}^{\delta+\delta'} \qquad (\delta, \delta', x, x' \geq 0)$$

où $\oplus$ désigne l'opération de convolution de deux probabilités sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
Pitman et Yor [ ] ont ensuite explicité la représentation de Lévy-Khintchine des probabilités Q_x^δ de la façon suivante

Théorème 1 : Pour toute $f \in \mathcal{F}$, on a :

$$(1.b) \qquad Q_x^\delta \left(e^{-\langle \omega, f \rangle}\right) = \exp - \int (xM + \delta N)(d\omega) \left[1 - e^{-\langle \omega, f \rangle}\right]$$

où :

(i) M désigne l'image de la mesure d'Itô des excursions positives, hors de 0, du mouvement brownien réel.

(ii) $N = \int_0^\infty du\, M_u$, M_u désignant l'image de M par l'application : $\omega \longrightarrow (\omega((t-u)^+), t \geq 0)$.

A la suite de cet énoncé, on peut réécrire la formule (1-b) sous la forme :

$$(1\text{-}b') \qquad Q_x^\delta\left(e^{-\langle \omega, f\rangle}\right) = \exp - \int M(d\omega) \int \gamma_{x,\delta}(du) \left[1 - \exp - \langle \omega, f_u\rangle\right]$$

où $\gamma_{x,\delta}(du) = x\, \varepsilon_0(du) + \delta \cdot (du)$.

Rappelons succinctement, en la modifiant légèrement, la démonstration de (1-b) donnée en [ ] :

– le cas $\delta = 0$ découle du théorème de Ray-Knight [ ] selon lequel $(\ell^a_{\tau_x} ; x \geq 0)$ a pour distribution Q_x^0 ;

– le cas $\delta = 2$, $x = 0$, découle de ce que, d'une part, d'après Pitman [ ], $(|B_t| + \ell_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, et, d'autre part, d'après Williams [ ], le processus des temps locaux d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, sur tout l'intervalle de temps $(0, \infty)$ a pour loi Q_0^2.

(1.2) Pour tous $\delta > 0$ et $x \geq 0$, notons C_x^δ le temps local au niveau x pendant tout l'intervalle de temps $(0,\infty)$ du processus $\left(\frac{2}{\delta}\ell_t + |B_t|, t \geq 0\right)$.

On montre aisément, à l'aide du lemme de Kolmogorov, qu'il existe une version conjointement continue en (δ, x) de la famille $(C_x^\delta ; \delta > 0, x \geq 0)$. ~~On ne~~ On ne considérera plus désormais que cette version, que l'on note encore C.

Théorème 2 : Pour tout $\delta > 0$, la loi de $C^\delta = (C_a^\delta, a \geq 0)$ est Q_0^δ.

Le théorème 2 découle immédiatement de l'argument utilisé en (1-1) dans le cas $\delta = 2$, $x = 0$, et de la représentation (1-b') de Q_0^δ.

Il serait intéressant d'étudier de façon approfondie la loi du processus $C = (C_a^\delta;\ a \geq 0, \delta > 0)$. Notons seulement ici que cette loi est indéfiniment divisible, en conséquence de la propriété d'additivité suivante : pour tous $p, q > 0$,

$$(1\text{-c}) \qquad C_a^{p\delta} + \tilde{C}_a^{q\delta} \overset{(d)}{=} C_a^{(p+q)\delta} \qquad (a \geq 0;\ \delta > 0)$$

où $\tilde{C}$ désigne une copie indépendante de C.

De plus, cette loi, considérée comme probabilité sur $C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ admet une représentation de Lévy-Khintchine, avec, pour mesure de Lévy :

$$\underline{N} = \int_0^\infty du\, \underline{M}_u \quad ,$$

où $\underline{M}_u$ désigne l'image de M par l'application :

$$\underline{\varphi}_u : \quad \begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) & \longrightarrow & C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+) \\ \omega & \longrightarrow & \underline{\omega}_u : (\delta, y) \longrightarrow \omega\left[\left(y - \frac{u}{\delta}\right)^+\right] \end{array}$$

2. Une famille de temps locaux et de ~~processus~~ densités d'occupation.

(2.1) Pour tout $x \geq 0$, on désigne par $(\lambda^x(t), t \geq 0)$ le temps local en 0 de $(B_t - x\ell_t ; t \geq 0)$. Plus généralement, on définit, pour tout $p \geq 1$:

$$\lambda_p^x(t) = \int_0^t \ell_s^{p-1} \, d\lambda_s^x$$

Pour tout $p \geq 1$, on montre aisément l'existence d'une version bicontinue de $(\lambda_p^x(t) ; x \geq 0, t \geq 0)$, seule version que l'on considérera désormais.

Comme le montre la proposition suivante, le processus $\mu \equiv \lambda_2$ joue un rôle particulier parmi les processus $\lambda_p \, (p \geq 1)$.

Proposition 3 : Pour tout $t \geq 0$, le processus $(\mu_t^x ; x \geq 0)$ est le processus des densités d'occupation du processus $(B_s^+/\ell_s ; 0 < s \leq t)$, c'est à dire : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, à support dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^t ds \, f(B_s/\ell_s) = \int_0^\infty dx \, f(x) \mu_t^x .$$

(2.2) On note maintenant, pour tout $p \geq 1$, $\lambda_p^\circ = (\lambda_p^a \equiv \lambda_p^a(\tau_1) ; a \geq 0)$, et, d'autre part, pour tout $x \geq 0$: $X_x(\cdot) = (\ell_{\tau_x}^a ; a \geq 0)$.

Soulignons que le processus $X = (X_x(\cdot), x \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendants à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, qui admet M pour mesure de Lévy-Khintchine.

Théorème 4 : Pour tout $p \geq 1$, les lois des processus λ_p° et X sont liées par la relation :

(2.a)
$$\lambda_p^\circ \overset{(d)}{=} \int_0^\infty e^{-px} \, dX_x(\cdot)$$

Suivant la terminologie de Jurek et Verwaat [ ], la relation (2-a) explicite la représentation d'Urbanik de la loi self-décomposable du processus ∂_p° à l'aide de la transformée de Laplace de X.
La représentation (2-a) rend évident l'énoncé suivant, que l'on pourrait également démontrer de façon plus directe

Corollaire 4 :

1) Pour tous $p, q \in]0,1]$, on a :

$$(2\text{-}b) \qquad \partial^\circ_{1/p} + \tilde{\partial}^\circ_{1/q} \overset{(d)}{=} \partial_{1/p+q} ,$$

où $\tilde{\partial}^\circ_{1/q}$ désigne une copie de $\partial^\circ_{1/q}$, indépendante de $\partial^\circ_{1/p}$.

2) Pour tout $p \geq 1$, on a :

$$(2\text{-}c) \qquad (\partial_p^x \,;\, x \geq 0) \overset{(d)}{=} \left(\frac{1}{p}\partial^{xp} \,;\, x \geq 0\right).$$

En particulier, les lois de μ° et ∂° sont liées par les relations suivantes :

$$(2\text{-}b') \quad \mu^\circ + \tilde{\mu}^\circ \overset{(d)}{=} \partial^\circ \,; \qquad (2\text{-}c') \quad \mu^\circ \overset{(d)}{=} \left(\frac{1}{2}\partial^{2x} \,;\, x \geq 0\right)$$

Le théorème suivant permet, en particulier, d'expliciter la loi du processus ∂° en fonction de celle du processus C défini au paragraphe 1. La démonstration de ce théorème repose de façon essentielle sur l'identité en loi :

$$(2d) \qquad (B_u \,;\, u \leq \tau_1) \overset{(d)}{=} (B_{\tau_1 - u} \,;\, u \leq \tau_1).$$

Théorème 5 : L'identité en loi suivante est satisfaite :

$$(2\text{-}e) \qquad \left(\int_0^x dy\, \mu^y \,;\, \partial^x \,;\, x \geq 0\right) \overset{(d)}{=} \left(\int_0^x dy\, C_y^{1/x} \,;\, C_x^{1/x} \,;\, x \geq 0\right)$$

(2.3) Les calculs de Knight [ ] et Jeulin-Yor [ ] permettent d'expliciter, au moyen d'une formule de récurrence, les transformées de Laplace des marginales de rang fini du processus μ^i, et donc de ν^i, d'après (2.c').

Théorème 6 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{R}_+^n$, et $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

On a alors :

(2.f) $$E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^{x_i}\right)\right] = \exp -\frac{1}{2}\int_0^1 d\ell \; H_1(\ell),$$

où la fonction H_1 est définie au moyen de la récurrence :

$$H_{n+1}(\ell) = 0 \quad \text{et} \quad H_k(\ell) = \frac{H_{k+1}(\ell) + \alpha_k \ell}{1 + (H_{k+1}(\ell) + \alpha_k \ell)(x_k - x_{k-1})\ell} \qquad (k \leq n)$$

3. Un théorème et une loi limites.

(3.1) Soit $(W_t, t \geq 0)$ mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, tel que p.s. W_0 n'appartienne pas à la droite $D = \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$. On peut donc définir une détermination continue $(\theta_t, t \geq 0)$ de l'angle de $(W_s, s \leq t)$ autour de D.

C'est le théorème limite suivant qui a motivé l'étude ci-dessus.

Théorème 7 (Le Gall-Yor [ ])

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que : $\dfrac{\log f(u)}{\log u} \xrightarrow[u \to \infty]{} 1 - x$

On note $C^f = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} \leq f(|\xi_3|)\}$

Alors, on a :

(3.a) $$\frac{2}{\log t}\left(\int_0^t d\theta_s \, 1_{(W_s \in C^f)} ; \int_0^t d\theta_s \, 1_{(W_s \notin C^f)}\right) \xrightarrow{(d)} \left(\int_0^\tau d\gamma_s \, 1_{(|B_s| \geq x\ell_s)} ; \int_0^\tau d\gamma_s \, 1_{(|B_s| \leq x\ell_s)}\right)$$

où B et γ désignent deux mouvements browniens réels indépendants, issus de 0, ℓ est le temps local de B en 0, et $\tau = \inf\{s : \ell_s > 1\}$.

(3.2) La proposition suivante peut être considérée comme une description de la loi de la variable limite qui figure en (3-a).

<u>Proposition 8</u> : <u>Posons</u>, <u>pour</u> $x \in (0,1)$:

$$A_x^+ = \int_0^{\tau} ds\, 1_{(B_s \geq x\ell_s)} \quad \text{et} \quad A_x^- = \int_0^{\tau} ds\, 1_{(0 \leq B_s \leq x\ell_s)} .$$

<u>On a, pour tous</u> $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$(3\text{-}b)\quad E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2 A_x^- + \beta^2 A_x^+\right) - \lambda \gamma^x\right\}\right] = \left[ch(\alpha x) + \frac{\beta + 2\lambda}{\alpha}\, sh(\alpha x)\right]^{-1/2x}$$

La formule (3-b) est à rapprocher de l'identité en loi (2-e) ; on retrouve en effet que l'on a, pour x fixé :

$$(3\text{-}b')\qquad \left(A_x^-, \gamma^x\right) \stackrel{(d)}{=} \left(\int_0^x dy\, C_y^{1/x} \,;\, C_x^{1/x}\right)$$

De plus, on déduit de la formule (3-b) que, conditionnellement à $\gamma^x = t$, les variables A_x^- et A_x^+ sont indépendantes et :

$A_x^+ \stackrel{(d)}{=} \inf\left\{u : \gamma_u = \frac{t}{2}\right\}$, où γ est un mouvement Brownien réel issu de 0