Formule de balayage et convergence de martingales locales.

1. L'objet principal de cette Note est d'illustrer le théorème de Sharpe [ ] sur le comportement au voisinage de 0 des martingales locales continues définies sur $]0,\infty[$. Nous prenons comme exemple de telles martingales les processus :

$$(1.a) \qquad M_t = f(L_t)B_t \qquad (t>0)$$

où $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement bornée, $(B_t, t\geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, et $(L_t, t\geq 0)$ son temps local en 0. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de B.

D'après la formule de balayage ([ ]), pour tout $\varepsilon>0$, on a :

$$f(L_{t+\varepsilon})B_{t+\varepsilon} - f(L_\varepsilon)B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} f(L_s)\,dB_s \qquad (t\geq 0)$$

En particulier, pour tout $\varepsilon>0$, $(M_{t+\varepsilon}, t\geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ martingale locale ; autrement dit, $(M_t, t>0)$ est une martingale locale indexée par $]0,\infty[$.

D'après Sharpe ([ ], proposition (2.7)), il existe deux mesures aléatoires positives $Q(\omega ; dt)$ et $\lambda(\omega ; dt)$ sur $]0,\infty[$ telles que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$M^2_{t+\varepsilon} - M^2_\varepsilon - Q(\cdot\,;\,]\varepsilon, \varepsilon+t])$$

et $\quad |M_{t+\varepsilon}| - |M_\varepsilon| - \lambda(\cdot\,;\,]\varepsilon,\varepsilon+t])$

soient deux $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})_{t\geq 0}$ martingales locales.

Il est immédiat, à l'aide de la formule de balayage, d'identifier Q et λ ; on a :

$$(1.b) \qquad Q(\omega ; dt) = f^2(L_t)\,dt \quad ; \quad \lambda(\omega ; dt) = |f(L_t)|\,dL_t \, .$$

Rappelons maintenant le

Théorème 1 (Sharpe [ ], théorème (2.4), and theorem (2.15))

Soit $(M_t; t>0)$ une $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ martingale locale continue.

1) Alors, $P(d\omega)$ p.s., l'une des 3 éventualités suivantes a lieu :

(a) $\lim\limits_{t \downarrow\downarrow 0} M_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{R}$;

(b) $\lim\limits_{t\downarrow\downarrow 0} |M_t(\omega)| = \infty$;

(c) $\underline{\lim}_{t\downarrow\downarrow 0} M_t(\omega) = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow\downarrow 0} M_t(\omega) = +\infty$.

2) Notons $\Omega_{(\alpha)}$ l'ensemble des ω pour lesquels la propriété $(\alpha) = (a), (b)$, ou (c) a lieu. On a alors, $P(d\omega)$ p.s. :

$$\Omega_{(a)} = \Omega^Q \; ; \; \Omega_{(b)} = \Omega^{(0)} \setminus \Omega^Q \; ; \; \Omega_{(c)} = \complement(\Omega^Q \cup \Omega^{(0)}),$$

où :

$$\Omega^Q = \{\omega : Q(\omega;]0,1]) < \infty\}, \text{ et } \Omega^{(0)} = \{\omega : \lambda(\omega;]0,1]) < \infty\}.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 2 : Soit $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{t\downarrow\downarrow 0} f(L_t) B_t$ existe P p.s. ;

(ii) $\lim\limits_{t\downarrow\downarrow 0} f(L_t) B_t = 0$, P p.s.

(iii) $\int_0^1 dx\, |f(x)| < \infty$

(iv) $\int_0^1 ds\, f^2(L_s) < \infty$, P p.s.

Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, on a, $P(d\omega)$ p.s :

$$\underline{\lim}_{t\downarrow\downarrow 0} f(L_t) B_t = -\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{t\uparrow\uparrow 0} f(L_t) B_t = +\infty.$$

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que :

– en conséquence de la loi 0-1, les ensembles $\Omega_{(a)}$, $\Omega_{(b)}$ et $\Omega_{(c)}$ sont chacun de probabilité 0 ou 1 ;

– en conséquence de l'existence de zéros de B dans tout intervalle $(0,\varepsilon)$, l'éventualité (b) ne peut avoir lieu, et les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

Remarquons ensuite que, d'après le théorème 1, et (1.b), les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à (iv).

D'autre part, si (iii) est satisfaite, on a : $\Omega^{(0)} = \Omega$ p.s., et donc, d'après la remarque précédente : $\complement\Omega^{Q} = \emptyset$, p.s, c'est à dire : $\Omega^{Q} = \Omega$ p.s., autrement dit (iv).

Inversement, si (iv) est satisfaite, on a, en posant $g = |f|$, et en appliquant encore la formule de balayage : pour $0 < \varepsilon < t$,

$$g(L_t)|B_t| = g(L_\varepsilon)|B_\varepsilon| + \int_\varepsilon^t g(L_s)\,\mathrm{sgn}(B_s)\,dB_s + \int_\varepsilon^t g(L_s)\,dL_s .$$

Sous l'hypothèse (iv), $g(L_\varepsilon)|B_\varepsilon|$ et $\int_\varepsilon^t g(L_s)\,\mathrm{sgn}(B_s)\,dB_s$ convergent lorsque $\varepsilon \to 0$ (pour la convergence de l'intégrale stochastique, on peut utiliser Sharpe ([ ], theorem (3.10))). En conséquence,

$$\int_\varepsilon^t g(L_s)\,dL_s \equiv \int_{L_\varepsilon}^{L_t} g(x)\,dx$$ converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, d'où : (iii).

2. On obtient un énoncé analogue à celui du théorème 2 lorsque l'on étudie la convergence, avec $t \to \infty$, de $(f(L_t)B_t\,;\ t>0)$.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ <u>une fonction borélienne</u>, <u>localement bornée</u>. <u>Alors</u>, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $\lim_{t\uparrow\infty} f(L_t)B_t$ <u>existe</u> P p.s. ;

(ii) $\lim_{t\uparrow\infty} f(L_t)B_t = 0$, P p.s.

(iii) $\displaystyle\int_1^\infty dx\, |f(x)| < \infty$

(iv) $\displaystyle\int_1^\infty ds\, f^2(L_s) < \infty$ P p.s.

Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, on a, P p.s. :

$$\varliminf_{t\uparrow\infty} f(L_t)B_t = -\infty \; ; \quad \varlimsup_{t\uparrow\infty} f(L_t)B_t = +\infty .$$