26/11/96 /.

- Donner des exemples (1).
- Meilleures présentations.

Grossissement Initial

Nous allons enfin rentrer dans le vif du sujet, et étudier dans un cas particulier comment des $\mathcal{F}_t$ semi-martingales restent des $\mathcal{G}_t$ semi-martingales, où $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$.

Ici, $\mathcal{G}_t$ est obtenu en adjoignant à $\mathcal{F}_0$ une tribu séparable $\mathcal{E}$. Précisément,

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \mathcal{E})$$

Pour commencer, nous allons nous intéresser au cas le plus élémentaire, celui où la tribu $\mathcal{E}$ est atomique.

Notations

Reprécisons nos notations.

Comme on va sans arrêt changer de probabilités, inspirés par le contrôle, on notera $P(X)$ l'espérance de la variable X par rapport à la probabilité P. De plus, on spécifiera quand nécessaire dans les espaces de processus la filtration et la probabilité.

$\mathcal{L}$ est l'espace des martingales locales, $\mathcal{S}$ est l'espace des semimartingales.

$\mathcal{V}_p$ est l'espace des processus prévisibles à variations finies.

$\mathcal{H}^1$ est l'espace des semimartingales $\overline{X} + \chi$ telles que $\| [\overline{X}, \overline{X}]_\infty^{\frac{1}{2}} \|_1 < \infty$ et

$\| \int_0^\infty \mid d\chi_s \mid \|_1 < \infty$. Notons que la première de ces deux normes est indépendante de la filtration et reste donc automatiquement finie par changement de probabilité avec densité bornée.

Notons aussi qu'on a

$$\| \int_0^\infty \mid d\chi_s \mid \|_1 = \sup_{\{t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}\}} \sum_{k=0}^{n} P(\mid X_{t_i} - P(X_{t_{i+1}} / \mathcal{F}_{t_i}) \mid) = V(\mathcal{F}, P)$$

On notera $\mathcal{M}^1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}^1$.

Une remarque qui sera fondamentale plus loin est la suivante: Soit $X \in \mathcal{S}$. Alors, il existe Q équivalente à P telle que $\forall n, X^n$, le processus X arrêté en n est dans $\mathcal{H}^1(\mathcal{F}, Q)$. Ce résultat, qui est une simple conséquence de Borel-Cantelli, permettra à chaque fois que nécessaire de *localiser* les processus dans $\mathcal{H}^1$ (ou $\mathcal{M}^1$).

(1). Reprendre les décomp non canoniques / Transfo par inversion avec Jonathan. / [Voir au dos]

Exemples particuliers avec : $\int_0^\infty ds \exp 2\nu (B_s + \nu s)$, $\nu < 0$. ← si on veut !!
pour lequel on sait tt Calculer !!

1 Adjonction d'une tribu atomique

On suppose qu'on a une famille (dénombrable) d'ensembles disjoints $(A_i)_{i\in I}$ telle que $P(A_i) > 0$, $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\mathcal{E} = \sigma(A_i, i \in I)$.

On note ${}^iZ_t$ une version càdlàg de la martingale $P(A_i/\mathcal{F}_t)$.

On énonce alors:

Théorème 1.1 *La filtration $(\mathcal{G}_t)$ vérifie (H'). Pour $X \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, P)$,*

$$\chi_t = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} \int_{0+}^{t} \frac{1}{{}^iZ_{s-}} d < X, {}^iZ >_s \in \mathcal{V}_p(\mathcal{G})$$

et $\overline{X} = X - \chi \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, P)$

Démonstration: Soit $X \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, P)$, $X_0 = 0$.

On pourrait démontrer directement que $\forall i \in I, \mathbf{1}_{A_i}X$ est une $\mathcal{G}$-quasimartingale et en déduire le résultat (cf. Jeulin), mais il est plus joli d'obtenir ce dernier comme conséquence du théorème de convexité de Jacod.

Soit $Q_n(A) = \dfrac{P(A \cap A_n)}{P(A_n)}$.

Comme $Q_n << P$, X est une $(Q_n, \mathcal{F})$-semimartingale (Girsanov). Cependant, comme $\forall A_i$, $Q_n(A_i) = 0$ ou 1, il est facile de voir que c'est aussi une $\mathcal{G}$ semi martingale pour Q_n.

Or, $P = \sum_n P(A_n)Q_n$ avec $\sum_n P(A_n) = 1$ et le théorème de Jacod dit que X est une semimartingale par rapport à P et $\mathcal{G}$.

Cherchons maintenant une décomposition canonique. Quitte à localiser, on peut supposer $X \in \mathcal{H}^1(\mathcal{G}, P)$ et donc $X = \overline{Y} + \chi$ avec $\overline{Y} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{G}, P)$ et $E(\int_0^\infty \mid d\chi_s \mid) < \infty$.

On va identifier χ à travers les intégrales de processus prévisibles par rapport à χ.

Soit H, $\mathcal{G}$-prévisible borné, nul en 0.

Notons tout d'abord qu'une vérification immédiate relie H aux projections $\mathcal{F}$-prévisibles avec

$$H_t = {}^{p-\mathcal{G}} H_t = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} \frac{1}{{}^iZ_{t-}} {}^p(\mathbf{1}_{A_i} H)_t$$

Alors,

$$E((H.\chi)_\infty) = E((H.X)_\infty) =$$

$$= \sum_{i\in I} E(\mathbf{1}_{A_i}(\frac{1}{{}^iZ_-} {}^p(\mathbf{1}_{A_i} H) \cdot X)_\infty) = \sum_{i\in I} E({}^iZ_\infty(\frac{1}{{}^iZ_-} {}^p(\mathbf{1}_{A_i} H) \cdot X)_\infty) =$$

$$= \sum_{i\in I} E(\int_0^\infty d < {}^iZ, \frac{1}{{}^iZ_-}{}^p(\mathbf{1}_{A_i}H)\cdot X >_s) = \sum_{i\in I} E(\int_0^\infty \frac{1}{{}^iZ_{s-}}{}^p(\mathbf{1}_{A_i}H)_s d < {}^iZ, X >_s) =$$

$$= \sum_{i\in I} E(\int_0^\infty \frac{1}{{}^iZ_{s-}} \mathbf{1}_{A_i} H_s d < {}^iZ, X >_s)$$

ce qui donne bien le résultat cherché. □

On peut étendre le résultat précédent en prenant $Q = \tilde{q}.P$, une probabilité équivalente à P, avec $\tilde{q}$ bornée, et en cherchant la $(\mathcal{G}, Q)$ décomposition d'une $(\mathcal{F}, P)$ martingale locale.

Plus précisément, soit $X \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}, P)$. Prenons ${}^iZ(\tilde{q}\mathbf{1}_{A_i}/\mathcal{F}_t)$ (une bonne version!). Pour H, $\mathcal{G}$ prévisible borné on a par le même calcul que précédemment

$$Q(\mathbf{1}_{A_i}(H\cdot X)_\infty) = Q(\mathbf{1}_{A_i}\int_0^\infty \frac{H_s}{{}^iZ(\tilde{q})_{s-}} d < X, {}^iZ(\tilde{q}) >_s)$$

et donc la partie à variations finies est donnée par

$$^{\tilde{q}}\chi_t = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} \int_0^t \frac{1}{{}^iZ(\tilde{q})_{s-}} d < X, {}^iZ(\tilde{q}) >_s$$

Remarquons qu'avec $I = \{1\}$, on retrouve le théorème de Girsanov.

Ce résultat permet de caractériser les $X \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}, P)$ qui sont dans $\mathcal{H}^1(\mathcal{G}, Q)$. Ce sont ceux pour lesquels

$$V_Q(X,\mathcal{G}) = Q(\int_0^\infty | d^{\tilde{q}}\chi_s |) = Q(\sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} \int_0^\infty \frac{1}{{}^iZ(\tilde{q})_{s-}} | d < {}^iZ(\tilde{q}), X >_s|) =$$

$$= P(\sum_{i\in I} \int_0^\infty \frac{\mathbf{1}_{A_i}\tilde{q}}{{}^iZ(\tilde{q})_{s-}} | d < {}^iZ(\tilde{q}), X >_s|) = P(\sum_{i\in I} \int_0^\infty | d < {}^iZ(\tilde{q}), X >_s|) < \infty$$

C'est en terme de bi-mesure que ce résultat sera le plus exploitable. On définit sur $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ est la tribu $\mathcal{F}$ prévisible)

$$\forall i, \mu_{X,\tilde{q}}(A_i, B) = P(\int_0^\infty \mathbf{1}_B(s) d < X, {}^iZ(\tilde{q}) >_s)$$

La norme $\|\mu_{X,\tilde{q}}\|$ est donnée par

$\sup\{\sum_{k,l} | \mu_{X,\tilde{q}}(\tilde{A}_k, B_l) |$, avec $(\tilde{A}_k)$ $\mathcal{E}$-partition finie de Ω, et (B_l) $\mathcal{P}(\mathcal{F})$-partition finie de $I\!R^+ \times \Omega\}$

Il n'est pas difficile de constater alors que

$$\|\mu_{X,\tilde{q}}\| = V_Q(X,\mathcal{G})$$

et donc que $X \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}, P)$ est dans $\mathcal{H}^1(\mathcal{G}, Q)$ si et seulement si $\|\mu_{X,\tilde{q}}\| < \infty$.

2 Adjonction d'une tribu séparable

On regarde maintenant le cas d'une tribu générale $\mathcal{E}$, séparable. L'idée fondamentale est qu'une telle tribu est engendrée par une suite croissante de tribus finies. Le résultat suivant est alors primordial:

Lemme 2.1 *Soient $X \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}, P)$ et $Q = \tilde{q}.P$ une probabilité équivalente à P avec $\tilde{q}$ bornée. Alors,*

$$V_Q(X, \mathcal{G}) = \lim_n V_Q(X, \mathcal{F} \vee \mathcal{E}_n)$$

où $(\mathcal{E}_n)$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{E}$ qui engendrent $\mathcal{E}$.

Idée de la preuve: Pour τ une subdivision de $I\!R^+$, on pose

$$V_Q(X, \mathcal{G}, \tau) = \sum_{i=0}^{n} Q(\mid X_{t_i} - E(X_{t_{i+1}}/\mathcal{G}_{t_i}) \mid)$$

Mais $E(X_{t_{i+1}}/(\mathcal{F} \vee \mathcal{E}_n)_{t_i}))$ est une martingale (en n !) qui va "moralement" converger vers $E(X_{t_{i+1}}/\mathcal{G}_{t_i})\ldots$ (cf. Jeulin). $\square$

Ce résultat et les remarques qui précèdent sur les bi-mesures permettent d'obtenir des critères sous la forme suivante, dont la démonstration consiste simplement à mettre bout à bout les résultats déjà obtenus:

Proposition 2.2 *Soit $X \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}, P)$*

a) Si $Q = \tilde{q}.P$, avec $\tilde{q}$ bornée, $X \in \mathcal{H}^1(\mathcal{G}, Q)$ si et seulement si $\|\mu_{X,\tilde{q}}\| < \infty$

b) X est une $\mathcal{G}$-semimartingale si et seulement si il existe une probabilité $Q = \tilde{q}P$, équivalente à P avec $\tilde{q}$ bornée telle que $\forall u > 0, \|\mu_{X^u,\tilde{q}}\| < \infty$

c) X est une $(\mathcal{G}, P)$ martingale locale si et seulement si $\forall A \in \mathcal{E}$, $< X, ^A Z >$ est nul.

Tout celà est très beau, mais pas vraiment explicite. En fait, très souvent, la tribu $\mathcal{E}$ sera donnée par l'intermédiaire d'une variable aléatoire, i.e. $\mathcal{E} = \sigma(L)$. L'exposé suivant qui traitera d'exemples fera abondamment référence à ce cas.

Introduisons la notation suivante: si $\tilde{q}$ est une variable aléatoire bornée, on note $\Lambda_s^a(\tilde{q})$ une "bonne version" de $P(\tilde{q}\mathbf{1}_{L>a}/\mathcal{F}_s)$. Comme précédemment, $\mathcal{G}_t = (\mathcal{F} \vee \sigma(L))_{t^+}$.

La proposition précédente se particularise ainsi:

Théorème 2.3 *Soit X une $(\mathcal{F}, P)$-martingale locale. Sont équivalentes*

(1) X est une $\mathcal{G}$-semimartingale

(2) Il existe $Q = \tilde{q}P$, avec $\tilde{q}$ bornée, telle que

(i) Il existe une version de $(a,t) \to < X, \Lambda^a(\tilde{q}) >_t$ continue à droite et à variations finies en a (resp. en t) pour t fixé (resp. pour a fixé).

(ii)

$$\int \mathbf{1}_{]0,t]\times \mathbb{R}}(s,a) \mid d < X, \Lambda^a(\tilde{q}) >_s \mid < \infty, \forall t$$

Démonstration: (1) $\Rightarrow$ (2) étant nettement plus embêtant, et *a priori* moins utile (?), on va se limiter à regarder l'autre implication.

Supposons donc (2).

Posons $A_t = \int \mathbf{1}_{]0,t]\times \mathbb{R}}(s,a) \mid d < X, \Lambda^a(\tilde{q}) >_s \mid$.

Par Fubini et puisque $< X, a \to \Lambda^a(\tilde{q}) >$ est à variations finies en a d'après (i),

$$A_t = \sup_n \Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^t \mid d < X, \Lambda^{k/2^n}(\tilde{q}) - \Lambda^{k+1/2^n}(\tilde{q}) >_s \mid \Big)$$

(ii) implique que A_t est $\mathcal{F}$-localement intégrable. Soit alors T un $\mathcal{F}$ temps d'arrêt tel que $P(A_T) < \infty$ et $P([X,X]_T^{\frac{1}{2}}) < \infty$.

Considérant $\mathcal{E}_n = \sigma(\{\frac{k}{2^n} < L \leq \frac{k+1}{2^n}\}, k \in \mathbf{Z})$, on peut écrire en utilisant les résultats précédents

$$\|\mu_{X^T,\tilde{q}}\|_{\sigma(L)} = \sup_n \|\mu_{X^T,\tilde{q}}\|_{\mathcal{E}_n}$$

$$= \sup_n P\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^\infty \mid d < X^T, \Lambda^{\frac{k}{2^n}}(\tilde{q}) - \Lambda^{\frac{k+1}{2^n}}(\tilde{q}) >_s \mid \Big)$$

$$\leq P(A_T) < \infty$$

D'après la proposition précédente, X^T est donc une $H^1(\mathcal{G}, Q)$ semimartingale, donc X est une $(\mathcal{G}, Q)$ semimartingale et par suite une $(\mathcal{G}, P)$ semimartingale. $\square$.

Il est maintenant naturel de s'intéresser à la décomposition canonique d'un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{F}, P) \cap \mathcal{S}(\mathcal{G}, P)$.

On remarque que si L est à valeurs dénombrables, et si X est de carré intégrable, la partie à variations finies par rapport à $(\mathcal{G}, P)$, donnée par

$$\sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{L=i\}} \int_0^{\cdot} \frac{1}{{}^iZ_{s-}} d < X, {}^iZ >_s$$

est absolument continue par rapport à $< X, X >$ d'après l'inégalité de Kunita Watanabe.

Ce résultat n'est pas vrai en général: par exemple, si $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle d'un processus de Poisson N_t, toute $\mathcal{F}_t$ martingale locale est à variations finies et donc reste une semi-martingale pour une filtration plus grosse, qui satisfait donc (H'). Pourtant dN_t n'est pas absolument continue par rapport à $dt = d < N, N >_t$.

Le résultat partiel qui suit sera utilisé intensivement dans les exemples.

Proposition 2.4 *Soit $X \in M^2_{\text{loc}}(\mathcal{F}, P)$. Posons $\Lambda(a, s) = P(L > a/\mathcal{F}_s)$.*

On suppose qu'il existe une application mesurable $l : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

(i)

$$\int_0^t d < X, X >_s \int_{\mathbb{R}} \mid l(x, s) \mid \Lambda(dx, s-) < \infty, \forall t$$

(ii)

$$< X, \Lambda^a >= \int_0^{\cdot} d < X, X >_s \int_{]a,\infty[} l(x, s)\Lambda(dx, s-), \forall a$$

Alors X est une semimartingale dont la partie à variations finies χ est absolument continue par rapport à $< X, X >$ de densité $l(L, .)\mathbf{1}_{]0,\infty[}$.

Démonstration: Le fait que X soit une semimartingale se vérifie aisément à l'aide du Théorème 2.3. C'est la recherche de la décomposition qui est plus intéressante.

Considérons la mesure sur $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ définie par

$$\mu(A) = P((\mathbf{1}_A \cdot \chi)_\infty)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On discrétise L en considérant la variable L^n (resp. L^{n-}) qui vaut $\frac{k+1}{2^n}$ (resp. $\frac{k}{2^n}$) si $\frac{k}{2^n} < L \leq \frac{k+1}{2^n}$.

Soit $\mathcal{P}^n$ la tribu prévisible sur $\mathcal{F} \vee \sigma(L^n)$ et μ^n la restriction de μ à cette tribu. D'après le Théorème 1.1 et la condition (ii), μ^n est absolument continue par rapport à $d < X, X >_s dP$ de densité

$$U_s^n = \frac{\int_{]L^{n-},L^n]} l(x,s)\Lambda(dx,s-)}{\Lambda(L^{n-},s-) - \Lambda(L^n,s-)}$$

Une vérification aisée montre alors que U_s^n est la projection prévisible de $l(L,.)$. On a alors, pour tout $A \in \mathcal{P}^n$,

$$\mu^n(A) = P(\int_0^\infty \mathbf{1}_A U_s^n d < X,X >_s) = P(\int_0^\infty \mathbf{1}_A l(L,.)d < X,X >_s)$$

d'où le résultat cherché sur $\mathcal{P}^n$. On raisonne ensuite par classe monotone. □

Remarque 2.5 On n'a regardé ici que des conditions pour qu'UNE $\mathcal{F}$ martingale reste une $\mathcal{G}$ semimartingale, ce qui est plus faible (beaucoup plus faible...) que (H'). Jeulin a evidemment regardé des conditions pour que (H') soit satisfaite. Bonne lecture...