ate 7 Juillet.

Quelques formules de grossissement initial (1^re exposé).

La formule générale (Thm 12.1, p. 33-34, Z II):

Si $\dot{\lambda}_t(d\ell) = \lambda_t(d\ell)\,\rho(\ell,t)$, alors, si (X_t) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, on a : $X_t = \tilde{X}_t + \int_0^t \rho(L,s)\, d\langle X,B\rangle_s$.

Exemple 1 : $L = \int_0^\infty \varphi(s)\,dB_s$; $\int_0^\infty ds\, \varphi^2(s) < \infty$.

Alors, λ_t, et $\dot{\lambda}_t$ sont faciles à calculer, et on trouve :

$$\rho(\ell,s) = \varphi(s)\,\frac{\ell - m_s}{\sigma_s^2}, \quad \text{où : } m_s = \int_0^s \varphi(u)\,dB_u\,;$$

$$\sigma_s = \int_s^\infty \varphi^2(u)\,du.$$

Cas particulier : $\varphi(s) = 1_{[0,t_0]}(s)$; i.e. $L = B_{t_0}$.

On obtient ainsi : $\rho(\ell,s) = \dfrac{\ell - B_s}{(t_0 - s)}$, $s < t_0$.

et on a donc : $B_t = \tilde{B}_t + \int_0^{t\wedge t_0} ds\, \dfrac{B_{t_0} - B_s}{t_0 - s}$.

Comme maintenant $(\tilde{B}_t)$ est indépendant de $\sigma(B_{t_0})$, on peut conditionner p/r. $B_{t_0} = y$ (par ex: 0), et on trouve ainsi la décomp. du pont :

$$B_t = x + \tilde{B}_t + \int_0^t ds\, \frac{y - B_s}{(t_0 - s)}$$

No.

Date

Ds la suite, on se servira bcp. de la conséquence suivante pour le pont de Bessel : $\Pi^{(t_0)}_{x \to 0}$:

$x \leftarrow r$ plutôt :

$$r(t) = r + \beta_t + \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(t_0 - s)}.$$

En fait, ceci nous mène au second Exemple :

Exemple 2 : Grossissement de la filtration d'un processus de Markov avec X_{t_0}.

Sur un espace canonique, ou avec F_u $(\mathcal{F}_u)$ mesurable, on a :

$$(1) \quad E_x[F_u \mid X_1 = y] = E_x\left[F_u \frac{p_{1-u}(X_u, y)}{p_1(x,y)}\right]$$

et donc, une $(\mathcal{F}_u)$ martingale (M_u) devient, pour la loi du pont : $\Pi^1_{x \to y}$:

$$M_u = \tilde{M}_u + \int_0^u \frac{d\langle p_{1-u}(X_u, y), M\rangle_u}{p_{1-u}(X_u, y)}$$

Par ex, pour un mvt. b. avec drift : $X_t = B_t + \int_0^t du\, b(X_u)$, on obtient :

$$B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\log p_{1-u}(X_u, y)\right) du,$$

et donc, pour le pont : $\Pi^1_{x \to y}$, le drift b est changé en :

$$b_y(x) = b(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\log p_{1-u}(x,y)\right).$$

Démonstration de la formule (1) : $E_x[f(X_1) F_u] = E_x[f(X_1)\, E_x[F_u \mid X_1]]$

$$= E_x[P_{1-u} f(X_u) F_u]$$

$$= E_x\left[F_u \int dy\, p_{1-u}(X_u, y) f(y)\right]$$

$$= \int dy\, p_1(x,y) f(y) E_x[F_u \mid X_1 = \ldots$$

Exemple 3: Décomposition du mouvement brownien $\{B_u, u \le d_1\}$ sur $[0,g_1]$, $[g_1,d_1]$, $[g_1,1]$, ...

- On commence par introduire l'op. de Brownian scaling;
- Puis, la décomposition: (faire un dessin).

$$b_u \equiv \frac{1}{\sqrt{g_t}} B_{u g_t}, \; u \le 1 \; ; \qquad m_u \equiv \frac{1}{\sqrt{t-g_t}} \left| B_{g_t + u(t-g_t)} \right|, \; u \le 1;$$

$$e_u \equiv r_u \equiv \frac{1}{\sqrt{d_t - g_t}} \left| B_{g_t + u(d_t - g_t)} \right|, \; u \le 1.$$

Cet exemple 3 sera décomposé en 2 parties:

(3.1) Grossissement initial avec $L = g \equiv g_1$.

Les formules pour $\lambda_s(dl)$ et $\dot{\lambda}_s(dl)$ sont:

$$2) \quad \lambda_s(dl) \equiv \varepsilon_{g_s}(dl)\, \Phi\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) + dl\, \overbrace{\frac{1_{s<l<1}}{\pi \sqrt{(l-s)(1-l)}} \exp\left(-\frac{B_s^2}{2(l-s)}\right)}^{e(s,l) \,\equiv}$$

d'où l'on déduit (mais cela utilise la formule de balayage ; à démontrer)

$$\dot{\lambda}_s(dl) \equiv \varepsilon_{g_s}(dl)\, \Phi'\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\mathrm{sgn}(B_s)}{\sqrt{1-s}} + dl\, e(s,l) \left(-\frac{B_s}{(l-s)}\right)$$

En conséquence, on a donc:

$$\rho(l,s) = \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\mathrm{sgn}(B_s)}{\sqrt{1-s}}\, 1_{(l<s)} + 1_{(l>s)} \left(-\frac{B_s}{l-s}\right) \qquad (5)$$

La formule de Grossissement devient donc :

$$B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t ds \left\{ 1_{(s<g)} \left(- \frac{B_s}{(g-s)} + 1_{(g\leq s)} \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \dots \right. \right.$$

En d'autres termes, on trouve bien le pont brownien $(B_u, u \leq g)$, et le méandre pour $t \geq g$.

A ce point, il faut présenter la relation d'Imhof pour le méandre, ...

$$(3) \qquad M = \frac{c}{X_1} \cdot P_0^{(3)}.$$

En effet, ce qui se passe est que : $E_0^{(3)}\left(\frac{1}{X_1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \psi\left(\frac{X_t}{\sqrt{1-t}}\right)$,

où : $\psi(x) = \dfrac{\Phi(x)}{x}$

Ainsi, lorsque l'on écrit la formule de Girsanov pour le changt. en (3), on trouve bien :

$$(4) \qquad X_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{X_s} + \int_0^t \frac{\psi'}{\psi}\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right)\frac{ds}{\sqrt{1-s}}.$$

Or, $\dfrac{\psi'}{\psi}(x) = \dfrac{\Phi'}{\Phi} - \dfrac{1}{x}$, et donc de (4), on déduit bien que la formule de Grossissement ci dessus est en accord.....

(3.2) Grossissement initial avec $L = d \equiv d_1$.

Dans ce cas, on trouve :

$$(5) \quad \lambda_s(dl) = \left(\frac{|x|}{\sqrt{2\pi(l-s)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(l-s)}\right)\right)\Big|_{x=B_s} 1_{(l>s)}\, dl.$$

No.

Date

On remarque bien sûr que ceci est :

$$\frac{y \exp(-y^2/2v)}{\sqrt{2\pi v^3}} \equiv -\frac{\partial}{\partial y}\left(p_v(y)\right).$$

On va donc obtenir : $\varphi(t,s) = \theta(v,x)\Big|_{\substack{x = B_s \\ v = t-s}} 1(t \geq s)$,

avec : $\theta(v, y) = \dfrac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_v(y)}{\frac{\partial}{\partial y} p_v(y)}. \equiv \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{v}$ $\qquad (x \equiv y!)$

Finalement, la formule de grossissement donne :

(6) $B_t = B_1 + \displaystyle\int_1^{t\wedge d} du \left\{\frac{1}{B_u} - \frac{B_u}{(d-u)}\right\}$,

ce qui montre que le processus $\left\{B_{1+v} ; v \leq d-1\right\}$

est un pont de Bessel 3, de longueur $(d-1)$.

Démonstration des formules (2) et (5) :

No.

Date

!)

Exemple 4 : Grossissement de la filtration brownienne avec :

$$L \equiv A_\infty^{(\nu)} = \int_0^\infty ds \exp 2(B_s + \nu s) \quad , \qquad \nu < 0 ; [\mu$$

Pour le calcul de $\lambda_s(d\ell)$, il suffit seulement à l'aide de la connaissance de la loi de $A_\infty^{(\nu)}$, lorsque $B_0 = 0$, i.e. :

$$P(A_\infty^{(\nu)} \in dy) = P\left(\frac{1}{2 Z_\mu} \in dy\right).$$

d'écrire :

$$\int \lambda_s(d\ell) f(\ell) = E\left[f(A_\infty^{(\nu)}) \middle| \mathcal{F}_s \right] = E\left[f(A_s^{(\nu)} + A_\infty^{(\nu)} \circ \theta_s) \middle| \mathcal{F}\right.$$

$$= E_{B_s^{(\nu)}}\left[f(A_s^{(\nu)}(\omega) + \tilde{A}_\infty^{(\nu)}) \right].$$

On trouve alors, assez facilement, en posant :

$$A_t^{(\nu)} \equiv \int_0^t ds \exp 2(B_s + \nu s) \ ; \quad r_t = \exp(B_t + \nu t) \ :$$

$$\rho(s, \ell) = r_t \frac{\partial}{\partial r} (\log \Phi)(r_t, A_t^{(\nu)} ; \ell), \quad [s \equiv$$

où :
$$\Phi(r,a;\ell) = \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\mu} \frac{1}{(\ell-a)^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{r^2}{2(\ell-a)}\right)$$

En conséquence,
$$\rho(s,\ell) = (2\mu) - \frac{r_s^2}{\ell - A_s^{(\nu)}},$$

— la formule de grossissement pour le mvt. brownien devient :

$$B_t = \beta_t + \int_0^t ds \left\{ (2\mu) - \frac{\exp 2(B_s+\nu s)}{(A_\infty^{(\nu)} - A_s^{(\nu)})} \right\}$$

$$= \beta_t + \int_0^t ds \left\{ -(2\nu) - \left(\exp(2(B_s+\nu s)) \Big/ \int_s^\infty du \exp 2(B_u+\nu u)\right) \right\}$$

Vérifications : a) On peut s'assurer que l'espérance conditionnelle donne bien 0.

i.e. : $-(2\nu) - E\left(\frac{1}{A_\infty^{(\nu)}}\right) = -2\nu - E\left[2 Z_{(-\nu)}\right] = -2\nu + 2\nu = 0.$

b) Transformons le résultat précédent en un résultat sur les processus de Bessel, au moyen de la rep. de Lamperti, i.e. :

$$\exp(B_t + \nu t) = R^{(\nu)}_{\int_0^t ds \exp 2(B_s+\nu s)}.$$

Le grosst précédent revient à grossir la filtration de $R^{(\nu)}$ avec $T_0^{(\nu)} = \inf\{t : R_t^{(\nu)} = 0\}$

Ceci nous donne maintenant :

$$R_u^{(\nu)} = 1 + \gamma_u + \frac{2\mu+1}{2}\int_0^u \frac{ds}{R_s^{(\nu)}} - \int_0^u ds\, \frac{R_s^{(\nu)}}{(T_0 - s)}$$

No.

Date

Autrement dit, $\left(R^{(\nu)}_u,\ u \le T_0\right)$ est un pont de Bessel d'indice μ issu de 1, allant en 0, pdt l'intervalle T_0.

Exemple 5: Grossist. de la ~~tribu~~ filt. brownienne avec tte la tribu du temps local.

Thm 12.2: $$B_t = B_t^{loc} + \int_0^t ds \left\{ \frac{1}{B_s} - \frac{B_s}{(\gamma_s - s)} \right\}.$$ (p. 38-39-40).

$\nu)$
$t = 0 \}$.

8th of July.

Second lecture: Progressive enlargements / Martingales vanishing on the zero set of B

II. Martingales vanishing on the zero set. $Z = \{(t,\omega);\ t\leq 1,\ B_t(\omega)=0\}$

Main thm: To $X \in L^1(\mathcal{F}_1)$, we associate: $X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$.
Then, the following are equivalent:

1) $X \in \mathcal{M}_1^0$; 2) $E(X|\mathcal{F}_g) = 0$; 3) $X_g = 0$.

II.1. Preparations.

a) The balayage formula: It will give us a nb. of examples of elements of $\mathcal{M}_1^0$, but its applicability is much wider.

Proposition: If (X_t) is a semimartingale which vanishes on Z, then:

$$\gamma_{g_t} X_t = \int_0^t \gamma_{g_s}\, dX_s.$$

In particular if $(X_t) \in \mathcal{M}_1^0$, then: $(\gamma_{g_t} X_t)$ is also in $\mathcal{M}_1^0$.

Other examples: $$f(\ell_t)|B_t| = \int_0^t f(\ell_s)\, d|B_s|$$

Hence, $f(\ell_t)|B_t| - F(\ell_t)$ is a martingale.

Lemma 1: $$E[\gamma_{g_1}] = E\left[\int_0^1 dL_u\, \gamma_u\right], \text{ where: } dL_u = \frac{d\ell_u}{\sqrt{1-u}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Proof: We have already seen this result, see above, and also in the 1st lecture. But, it can also be understood as a consequence of the balayage formula:

$$E[\gamma_{g_1}|B_1|] = E\left[\int_0^1 d\ell_u\, \gamma_u\right],$$

and: $E[|B_1|\,|\mathcal{F}_{g_1}] = \sqrt{1-g_1}\, E[m_1]$ / etc... /.

zero set of BM.

We shall see more such results later.... (3rd lecture, e.g.).

(ω)=0}

<u>lemma 2</u>: $E[\gamma_g X_g] = E[X(\int_0^1 dL_u \gamma_u)]$

$= E[E(X|\mathcal{F}_g)\int_0^1 dL_u$

<u>Proof</u>: the 1st equality follows from lemma 1, and integration by parts.

<u>Question</u>: Que se passe-t-il si (X_t) est une semimartingale? J'ai envie d'écrire:

$$E[\gamma_{g_t} X_{g_t}] = \text{etc....} \quad ?$$

ples of

then:

II.2. <u>Proof of the theorem.</u> (p. 67).

II.3. <u>Some examples of elements of $\mathcal{M}^0$</u>, <u>a general representation theorem.</u>

We now know that elements of $\mathcal{M}^0$ are martingales whose terminal value ($\in \mathcal{F}$ say) is in the orthogonal of $L^2(\mathcal{F}_g)$, i.e.:

$$Y = X - E[X|\mathcal{F}_g].$$

dL_u / $1-u$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

1st

This gives a systematic way to construct elements of $\mathcal{M}^0_1$;

example:

$X = f(B_1)$; $\quad E[X|\mathcal{F}_g] = E[f(\sqrt{1-g}\cdot m_1\cdot \varepsilon)|\mathcal{F}_g$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dy \frac{y}{(1-g)} \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-g)}\right)(f(y)+$$

puis, on fait le calcul de:

$$Y_t = P_{1-t} f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^\infty dy\, y\,(f(y)+f(-y))\,E[-$$

or, on a déjà calculé ce genre de quantité.....

Puis, la discussion amène aux questions d'équations conditionnelles....

III. Some remarks about $\mathcal{F}_{L-}$ and $\mathcal{F}_{L+}$.

By definition: $\mathcal{F}_{L-} = \sigma\{ z_L ; z\ (\mathcal{F}_t) \text{ predictable} \}$

$\mathcal{F}_{L+} = \sigma\{ z_L ; z\ (\mathcal{F}_t) \text{ prog. measurable} \}$

[$(\mathcal{F}_t)$ prog. measurable sets / process.... are complicated, but .....].

Now, since L is a $(\mathcal{F}_t^L)$ stopping time, we have also the more classical: etc.... w.r.t. $(\mathcal{F}_t^L)$, and:

$$\mathcal{F}_{L+} = (\mathcal{F}^{prog, L})_L \; ; \quad \mathcal{F}_{L-} = \mathcal{F}_{L-}^{prog, L}.$$

How can we compute cond. expectations w.r.to $\mathcal{F}_{L-}$ and/or $\mathcal{F}_{L+}$?

$$E[X | \mathcal{F}_{L-}] = \lim_{u \uparrow\uparrow L} \frac{E[X 1_{(u<L)} | \mathcal{F}_u]}{P(L>u | \mathcal{F}_u)}$$

$$E[X | \mathcal{F}_{L+}] = \lim_{v \downarrow 0} \frac{E[X 1_{(L<v)} | \mathcal{F}_v]_{v = L+u}}{(1 - Z^L_{L+v})}$$

Is $\mathcal{F}_{L+}$ diff. from $\mathcal{F}_{L-}$?

Theorem: Let $L = \sup\{ t : M_t = 0 \}$, where (M_t) is unif. integrable, and $P(M_\infty = 0) = 0$. Then, $\mathcal{F}_{L+}$ strictly contains $\mathcal{F}_L$; in fact, $\mathrm{sgn}(M_\infty)$ is $\mathcal{F}_{L+}$ measurable, and not in $\mathcal{F}_L$. Proof: $E[M_\infty | \mathcal{F}_{L-}] = 0$; but, $E[|M_\infty| | \mathcal{F}_{L-}] \neq$

In the particular case of Brownian motion, we can show: $\mathcal{F}_{g_1+} = \mathcal{F}_{g_1} \vee \sigma(\mathrm{sgn}(B_1))$

No.

Date

I. Formules ~~de~~ de grossissement progressif.

Defn. d'un temps honnete: $L = \ell_t$, sur $(L \leq t)$.

Fins d'ensembles prévisibles. $L = \sup\{u : (u,\omega) \in \Gamma\}$.

Si L est honnête, alors on définit $\mathcal{F}_t^{\text{prog}\,L} = \mathcal{F}_t^L$ pour l'instant / Bien f... attention, mais je préciserai.....

Lemma 1: Si (H_u) est un proc. prévisible / $(\mathcal{F}_t^L)$, alors, $H_u = H'_u 1_{(u \leq L)} + H''_u 1_{(L}$

avec deux processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles H' et H''.

Ceci va nous permettre d'obtenir la formule de décomposition i.e: à L, on associe: $Z_t^L = P(L > t | \mathcal{F}_t) = M_t^L - A_t^L$.

Théorème: $$X_t = \tilde{X}_t + \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle X, Z^L\rangle_u}{Z_u^L} + \int_L^t \frac{d\langle X, 1-Z}{(1-Z_u^L)}$$

To prove the theorem, we first need an easy: / rappel: $Z_t^L = M_t^L - A$

Lemma 2. a) For every ≥ 0, previsible process (γ_u), one has:

$$E[\gamma_L] = E\left[\int_0^\infty dA_u^L \, \gamma_u\right]$$

b) For every uniformly integrable martingale (X_t), one has

$$E[X_L] = E[X_\infty A_\infty^L] = E[X_\infty M_\infty^L].$$

rable,

)

$| \mathcal{F}_{L-}] \neq 0.$

$(\text{sgn}(B_1))$

Barlow's conjecture: $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L \vee \sigma(A)$.

Proof of Lemma 2: It suffices to prove the 1^{st} formula for elementary z's: $z_u = 1_{\Gamma_t} 1_{]t,\infty]}(u,\omega)$.

Then:

$$E[z_L] = E[1_{\Gamma_t} Z^L_t] = -E[1_{\Gamma_t}(Z^L_\infty - Z^L_t)]$$

$$= E[1_{\Gamma_t}(A^L_\infty - A^L_t)]$$

$$= E\left[\int_0^\infty dA^L_u \, z_u\right].$$

For the 2^{nd} formula, we use the first result, and integration by parts.

Proof of the theorem: We want to show:

$$E\left[\int_0^\infty H_u \, dX_u\right] = E\left[\int_0^\infty H_u \left\{ \underbrace{\frac{d\langle X, Z^L\rangle_u}{Z^L_u}}_{1_{(u<L)}} + \underbrace{\frac{d\langle X, 1-Z^L\rangle_u}{(1-Z^L_u)}}_{1_{(L<u)}} \right\}\right]$$

when (H_u) is a simple $(\mathcal{F}^L_u)$ pred. process, i.e. H' & H'' are simple.

We start from the RHS

$$= E\left[\int_0^L H'_u \frac{d\langle X, Z^L\rangle_u}{Z^L_u}\right] + E\left[\int_L^\infty H''_u \left(\frac{d\langle X, 1-Z^L\rangle_u}{1-Z^L_u}\right)\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty H'_u \, d\langle X, Z^L\rangle_u\right] + E\left[\int_0^\infty H''_u \, d\langle X, 1-Z^L\rangle_u\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty H'_u \, d\langle X, M^L\rangle_u\right] - E\left[\int_0^\infty H''_u \, d\langle X, M^L\rangle_u\right]$$

$$= E\left[\int_0^L H'_u\, dX_u - \int_0^L H''_u\, dX_u\right]$$

$$= E\left[\int_0^L H'_u\, dX_u + \int_L^\infty H''_u\, dX_u\right] = E\left[\int_0^\infty H_u\, dX_u\right].$$

We then consider our previous example with $L = g_1$, but now we ~~can~~ have 2 enlargts. formulae:

| Recall, $Z^{g_1}_u = P(g_1 > u \mid \mathcal{F}_u)$
$\equiv \bar{\Phi}\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)$

1st enl. formula $\left[\text{in } (\mathcal{F}_t^{prog,\, g_1})\right]$:

$$B_t = \beta_t^{(prog)} + \int_0^{t\wedge g_1}\left(-\frac{\Phi'}{\bar{\Phi}}\right)\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{sgn(B_u)\,du}{\sqrt{1-u}} + \int_{g_1}^t \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{sgn(B_u)}{\sqrt{1-u}}$$

$\mathcal{F}_t^{prog,\, g_1} \subset \mathcal{F}_t^{in,\, g_1}$ /.

2nd enl. formula: $\left[\text{in } (\mathcal{F}_t^{in,\, g_1})\right]$:

$$B_t = \beta_t^{(in)} - \int_0^{t\wedge g_1}\frac{du\, B_u}{(g_1-u)} + \int_{g_1}^t \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{sgn(}{\sqrt{1-}}$$

Thus, we obtain:

$$\beta_t^{(in)} = \beta_t^{(prog)} + \int_0^{t\wedge g_1}\frac{du\, B_u}{(g_1-u)} - \int_0^{t\wedge g_1}\left(\frac{\Phi'}{\bar{\Phi}}\right)\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{sgn}{\sqrt{}}$$

Pour que ces calculs soient compatibles, il faut donc savoir montrer :

$$E\left[\frac{1_{(u<g_1)}}{(g_1-u)}\,\middle|\,\mathcal{F}_u^{prog,\, g_1}\right]|B_u| = \left(\frac{\Phi'}{\bar{\Phi}}\right)\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

ceci découle d'une formule explicite (Lemme 3, ds le 1er exposé).

Détails.].

autre exemple, avec dernier temps de passage:

$(Y_t, t \geq 0)$ $(\mathcal{F}_t)$ local mart; ≥ 0; $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$;

$y < Y_0$; $\gamma_y = \sup\{u \geq 0 : Y_u = y\}$.

n, we have the following

Lemma: i) $\sup_{t \geq 0} Y_t \overset{(law)}{=} \frac{Y_0}{U}$

ii) $Z_t^y \equiv P(\gamma_y > u \mid \mathcal{F}_u) = \left(\frac{Y_u}{y}\right) \wedge 1$.

$$= Z_0^y + \frac{1}{y}\int_0^u 1(Y_v \leq y)\, dY_v - \frac{1}{2y}\ell_t^y.$$

the enlargt. formula becomes:

$$X_t = \tilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\gamma_y} \frac{d\langle X,Y\rangle_v}{Y_v} 1(Y_v \leq y) - \int_{\gamma_y}^t \frac{d\langle X,Y\rangle_v}{(y-Y_v)}.$$

il vien

No.

Date

In particular, $\underbrace{Y_{\gamma_y+v} - y}_{\leq 0} = \left(\tilde{Y}_{\gamma_y+v} - \tilde{Y}_{\gamma_y} \right) - \int_0^{t+\gamma_y} \frac{d\langle Y\rangle_{v+\gamma_y}}{(y - Y_{v+\gamma_y})}$

donc : 3 dim ?? BES |
semble bizarre ... | . (Vérifier)

En tt cas, lorsque l'on applique ceci à $Y_t = 1/R_t$, avec $R = BES(3)$
il vient :
$$\left\{ R_{\gamma_1+t} - 1 \,;\, t \geq 0 \right\} : BES(3).$$

No.

Date 9th of July.

A third note for Prof. Fujita.

At the end of the Pitman Yor paper: " On the lengths of excursions ...." (Sem. Prob. XXXI,)
we have a discussion of generalized arc sine laws, which may applied again to yield some description of the joint law of (X_1, A_1^+),

where (X_t) is a skew Bessel process, with dimension $2-2\alpha$, and skewness parameter p; we denote the law of this process by $P_{\alpha,p}$. Then, we can write the following:

$$E_{\alpha,p}\left[f(X_1)\frac{1}{(1+\lambda A_1^+)^\alpha} 1(X_1>0)\right] \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\alpha,p}(f,\lambda).$$

$$= E_{\alpha,p}\left[f(\sqrt{1-g}\; m_1)\frac{1}{(1+\lambda[g A_{br}^+ + (1-g)])^\alpha}\right] p$$

where A_{br}^+ denotes the time spent ≥ 0 by the bridge.

Then, we also know the following:

i) g is beta$(\alpha, 1-\alpha)$ distributed; this result goes back to Dynkin (1961)

ii) the law of m_1 does not depend on α (this is a remarkable feature), i.e.:

$$P_\alpha(m_1 \in d\rho) = \rho e^{-\rho^2/2} d\rho.$$

iii) for every $\mu \geq 0$, $$E_{\alpha,p}\left[\frac{1}{(1+\mu A_{br}^+)^\alpha}\right] = \frac{1}{p(1+\mu)^\alpha + q}.$$

No.

Date

If we write: $\Pi_{\alpha,p}(f,\lambda) = p\, E_{\alpha,p}\left[f(\sqrt{1-q}\, m_1)\frac{1}{D^\alpha}\right]$,

where:

$$D = 1+\lambda(1-q) + \lambda q\, A^+_{br} \equiv (1+\lambda(1-q))(1+\mu(q)A^+_{br}),$$

where: $\mu(q) \equiv \frac{\lambda q}{1+\lambda(1-q)}$, we now deduce from iii), that:

$$\Pi_{\alpha,p}(f,\lambda) = E_{\alpha,p}\left[f(\sqrt{1-q}\, m_1)\frac{p}{(1+\lambda(1-q))^\alpha\,[p(1+\mu(q))^\alpha + q]}\right]$$

Since:

$$1+\mu(q) \equiv \frac{1+\lambda}{1+\lambda(1-q)}$$, we finally obtain:

$$\Pi_{\alpha,p}(f,\lambda) = E_{\alpha,p}\left[f(\sqrt{1-q}\, m_1)\frac{p}{p(1+\lambda)^\alpha + q(1+\lambda(1-q))^\alpha}\right]$$

Now, it seems plausible that, for $a>0$, there exists a r.v. $X_{p,a}$ such that:

$$E\left[\frac{1}{(1+\lambda X_{p,a})^\alpha}\right] = \frac{1}{p(1+\lambda)^\alpha + q(1+\lambda a)^\alpha}.$$

(1961) Assuming this is the case, we have obtained:

$$\Pi_{\alpha,p}(f,\lambda) = E_{\alpha,p}\left[f(\sqrt{1-q}\, m_1)\frac{p}{(1+\lambda X_{p,1-q})^\alpha}\right],$$

and finally, we find that, conditionally on $(X_1>0)$,

$$(X_1, A^+_1) \overset{(law)}{=} (\sqrt{1-q}\, m_1, X_{p,1-q}).$$