Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque.

M. Yor

Introduction

Dans ce travail, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ désigne un espace de probabilité filtré qui satisfait les conditions habituelles, ainsi que la propriété :

(C) <u>toute</u> $(\mathcal{F}_t, P)$ <u>martingale est continue</u> !

Rappelons les inégalités fondamentales de Burkholder-Gundy[1] : pour tout $p \in]0, \infty[$, il existe deux constantes universelles $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que, pour toute $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale X, nulle en 0, on ait :

$$(1)_p \qquad c_p\, E[\langle X \rangle_\infty^{p/2}] \leq E[(X^*_\infty)^p] \leq C_p\, E[\langle X \rangle_\infty^{p/2}],$$

où $X^*_t = \sup_{s \leq t} |X_s|$, et $(\langle X \rangle_t)$ désigne le processus croissant associé à (X_t).

Les inégalités $(1)_p$ demeurent bien entendu valables, sans modification des constantes lorsque l'on remplace X par $X_{\cdot \wedge T}$, pour T $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt. L'étude récente des grossissements de filtration (voir la monographie de Jeulin [6], notée [J] dans la suite) amène à se demander si les inégalités $(1)_p$ admettent des modifications convenables lorsque l'on remplace X par $X_{\cdot \wedge L}$, pour toute variable $L \geq 0$ (appelée simplement "temps") $\mathcal{F}$ mesurable. Il est bien sûr exclu que l'on ait, par exemple : $E[(X^*_L)^p] \leq C_p E[\langle X \rangle_L^{p/2}]$ (remplacer L par $L_\Gamma \equiv L \cdot 1_\Gamma$, et faire varier Γ dans $\mathcal{F}$).

Le principal résultat de ce travail est le suivant : notons $\mathcal{Y}$ l'ensemble des fonctions de Young $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Il existe une application $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0, \infty]$ telle que, pour tout $p > 0$, et toute $\Phi \in \mathcal{Y}$, on ait :

$$(2)_p \qquad \begin{aligned} E[(X^*_L)^p] &\leq \gamma(p, \Phi) \| \langle X \rangle_L^{p/2} \|_\Phi ; \\ E[\langle X \rangle_L^{p/2}] &\leq \gamma(p, \Phi) \| (X^*_L)^p \|_\Phi . \end{aligned}$$

---

(1) dans tout l'article, c_p et C_p désignent des constantes universelles, ne dépendant que de p, et variant de place en place.

(soulignons ici que, pour toute fonction de Young ~~est~~ comodérée Φ, et tout $p>0$, on a : $\gamma(p,\Phi)<\infty$, et que si $\Phi_*(x)=(x+1)\log(x+1)-x$, $\gamma(1,\Phi_*)<\infty$).

L'article est composé de trois paragraphes :

– le premier comprend les préliminaires nécessaires à la démonstration de $(2)_p$, à savoir : une variante de l'inégalité de Fefferman, quelques remarques sur certains espaces d'Orlicz, ainsi que la définition explicite de la fonction γ mentionnée ci-dessus, et enfin des rappels et compléments sur le grossissement progressif de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec le temps L.

– dans le second paragraphe, on démontre les inégalités $(2)_p$.

– le dernier paragraphe est constitué de compléments importants ; l'un d'entre eux développe les liens étroits qui existent entre notre étude, et la décomposition de Williams des trajectoires browniennes, tandis qu'un second replace l'étude dans le cadre général des inégalités de martingales avec poids.

Ce travail est loin d'épuiser le sujet, mais il a semblé préférable de se restreindre ici au cadre décrit plus haut, quitte à regrouper exemples et applications d'une part, généralisations et remarques diverses d'autre part dans des publications ultérieures.

1. Préliminaires.

(1.1) Une variante de l'inégalité de Fefferman.

L'énoncé – maintenant classique – de l'inégalité de Fefferman (voir, par exemple, Dellacherie-Meyer [4], p. 295) est le suivant :

pour tout couple de semi-martingales continues (X,Y), on a :

$$E\left[\int_0^\infty |d\langle X,Y\rangle_s|\right] \leq \sqrt{2}\, E\left[\langle X\rangle_\infty^{1/2}\right] \|Y\|_{BMO},$$

où $\|Y\|^2_{BMO} = \|\rho(Y)\|_\infty$, et $\rho(Y) = \operatorname{ess\,sup}_t E[\langle Y\rangle_\infty - \langle Y\rangle_t | \mathcal{F}_t]$.

La démonstration donnée en [4] (due à C. Herz) prouve en fait l'inégalité ~~résultat~~ suivante :

$$E\left[\int_0^\infty |d\langle X,Y\rangle_s|\right] \leq \sqrt{2}\, E\left[\langle X\rangle_\infty^{1/2}\right]^{1/2} E\left[\rho(Y)\langle X\rangle_\infty^{1/2}\right]^{1/2}$$

$$(3)_1 \qquad \leq \sqrt{2}\, E\left[(1+\rho(Y))\langle X\rangle_\infty^{1/2}\right].$$

Enfin, un argument de dualité entraîne, pour tout $p \in [1,\infty[$, l'inégalité :

$$(3)_p \qquad \left\|\int_0^\infty |d\langle X,Y\rangle_s|\right\|_p \leq \sqrt{2}\cdot p \cdot \left\|(1+\rho(Y))\langle X\rangle_\infty^{1/2}\right\|_p,$$

qui sera particulièrement utile pour la démonstration de $(2)_p$.

(pour d'autres variantes de l'inégalité de Fefferman, voir par exemple Barsia, [5], p. 8).

(1.2) Sur certaines normes d'Orlicz.

Les connaissances nécessaires dans la suite sur les fonctions de Young et les espaces d'Orlicz sont contenues dans l'appendice du livre de Neveu [12].

Toutefois, la norme $\|U\|_\Psi$ $(\Psi \in \mathcal{Y})$ de la fonction $U(x) = \log\frac{1}{x}$, définie sur $I = [0,1]$, muni de la mesure de Lebesgue, jouera un rôle important.

On est ainsi amené à définir, pour $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui sera, en général, mais pas toujours, une fonction de Young :

$$n_1(\Psi) = \|U\|_\Psi \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\left\{a : \int_0^1 dx\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right) \leq 1\right\}$$

Il vient, après changement de variable : $n_1(\Psi) = \inf\{a : E[\Psi(V_a)] \leq 1\}$

où V_a désigne une variable exponentielle de paramètre a.

Plus généralement, posons, pour $p \in]0,\infty[$:

$r_p(\Psi) = \| U^p \|_{\Psi} \equiv r_1(\Psi_p)^p$, où $\Psi_p(u) \equiv \Psi(u^p)$.

Un calcul facile montre que, pour $\Psi_*(x) = e^x - 1 - x$, fonction de Young conjuguée de $\Phi_*(x) = (x+1)\log(x+1) - x$, on a : $r_1(\Psi_*) = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$, mais $r_p(\Psi_*) = \infty$, pour $p > 1$. Notons encore que, si $\Psi_{(p)}(x) \equiv x^p$,

$$r_p(\Psi_{(1)}) = r_1(\Psi_{(p)})^p = \Gamma(p+1).$$

De façon générale, si Ψ est une fonction de Young modérée, on a : $r_p(\Psi) < \infty$ pour tout $p > 0$, ce qui découle de l'estimée $\Psi(t) = O(t^\alpha)$ $(t \to \infty)$, avec $\alpha \equiv \sup_t \frac{t\,\psi(t)}{\Psi(t)} < \infty$, ψ désignant la dérivée à droite de Ψ.

Finalement, la fonction $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0,\infty]$ qui figure dans la formulation de $(2)_p$ est définie par : $\gamma(p,\Phi) = c_p\left(\|1\|_{\Psi} + r_p(\Psi)\right)$ où c_p est une constante suffisamment grande qui ne dépend que de p, et Ψ est la fonction de Young conjuguée de Φ.

(1.3) <u>Sur le grossissement progressif de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec le temps</u> L.

Soit $L : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. On note $(\mathcal{F}_t^L)$ la plus petite filtration contenant $(\mathcal{F}_t)$, continue à droite, faisant de L un temps d'arrêt. Un des résultats importants de la théorie du grossissement (Barlow [2] ; Jeulin-Yor [7] ; Jeulin [J]) est le suivant :

~~Si (X_t) est une~~

si (X_t) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, il existe $(\tilde{X}_t)$ $(\mathcal{F}_t^L)$ martin[g]ale locale telle que :

$$(4) \qquad X_{t\wedge L} = \tilde{X}_t + \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle X, M^L\rangle_s}{Z_s^L},$$

où $Z_t^L = P(L>t \mid \mathcal{F}_t)$ (version continue à droite), et (M_t^L) est la partie martingale (continue, sous l'hypothèse (C)) de Z^L.

Remarquons que, sous l'hypothèse (C), Z^L est continue si, et seulement si, pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T, $P(L=T>0)=0$. On a alors le :

Lemme 1 : 1) Si $I_L \equiv \inf_{t<L} Z_t^L$ (on pose $I_L = 1$, sur $\{L=0$ on a, pour tout $b \in]0,1[$: $P(I_L < b) \leq b$, avec égalité dans le cas où, pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T, $P(L=T)=0$, i.e : dans ce cas, I_L est uniformément distribuée sur $[0,1]$.

2) Si $\rho_L \equiv \rho\left(\int_0^{\cdot\wedge L} \frac{dM_s^L}{Z_s^L}\right)$ (calculé dans la filtration $(\mathcal{F}_t^L)$), on a:

$$(5) \qquad \rho_L \leq 2\left(1+\log\frac{1}{I_L}\right).$$

Démonstration : 1) Pour $b \in]0,1[$, notons $T_b = \inf\{t : Z_t^L < b\}$.

On a : $P\{I_L < b\} = P\{L > T_b\} = E[Z_{T_b}^L] \leq b P\{T_b < \infty\} \leq b$, avec égalité dans le cas où (Z_t^L) est continue, et $Z_0^L = 1$, d'où le résultat.

2) Par définition de ρ_L (cf : (11)), on a :

$$\rho_L = \operatorname{ess\,sup}_t \rho_L(t), \text{ avec } \rho_L(t) \equiv E\left[\int_t^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2} \,\Big|\, \mathcal{F}_t^L\right] 1_{(t<L}$$

Pour tout $t \geq 0$, les tribus $\mathcal{F}_t^L$ et $\mathcal{F}_t$ coïncident sur l'ensemble $\{t<L\}$.

Un simple calcul d'espérances conditionnelles donne alors :

$$\rho_L(t) = E\left[1_{(t<L)}\int_t^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z^L_s)^2}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]\frac{1(t<L)}{P(t<L\,|\,\mathcal{F}_t)}$$

$$= \frac{1}{Z^L_t}\, E\left[\int_t^\infty \frac{d\langle M^L\rangle_s}{Z^L_s}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right] 1_{(t<L)}, \text{ par définition de } Z^L$$

Nous allons maintenant montrer que, sur $\{t<L\}$, on a :

$$(6) \qquad \rho_L(t) \leq 2\left(1+\log\frac{1}{Z^L_t}\right),$$

ce qui implique a fortiori (5). Notons simplement Z_t pour Z^L_t et M_t pour M^L_t.

Il vient, en appliquant la formule d'Itô, entre les temps t et ∞, à $\varphi(Z_\cdot)$, avec $\varphi(z)=z+z\log\frac{1}{z}$ ($\varphi(0)=0$), et en faisant la convention $\infty\cdot d(0)=0$

$$(0=)\,\varphi(Z_\infty)=\varphi(Z_t)+\int_t^\infty \log\frac{1}{Z_{s-}}\,dZ_s-\frac{1}{2}\int_t^\infty\frac{d\langle M\rangle_s}{Z_s}+\left(\Sigma_\infty-\Sigma_t\right)$$

(Z_t étant une surmartingale ≥ 0, on peut justifier aisément l'application de la formule d'Itô).

où $\Sigma_t = \sum_{s\leq t}\left\{\varphi(Z_s)-\varphi(Z_{s-})-\left(\log\frac{1}{Z_{s-}}\right)(Z_s-Z_{s-})\right\}$

Or, chacun des termes de la somme $(\Sigma_\infty-\Sigma_t)$ ~~étant~~ est de signe négatif, et (Z_t) est une surmartingale à valeurs dans $[0,1]$. Ceci entraine :

$$\frac{1}{2}E\left[\int_t^\infty\frac{d\langle M\rangle_s}{Z_s}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]\leq\varphi(Z_t),$$ ~~ce qui implique~~ ce qui implique (6).

<u>Remarque :</u> On peut également démontrer l'inégalité (6) en travaillant directement dans la filtration $(\mathcal{F}_t^L)$. Supposons, pour simplifier, que pour tout $(\mathcal{F}_t)$ t.a T, $P(L=T)=0$. Notons A^L le processus croissant prévisible qui engendre le potentiel Z^L. On a :

$$dZ_t^L = dM_t^L - dA_t^L = d\tilde{M}_t^L + \frac{d\langle M^L\rangle_t}{Z_t^L} - dA_t^L \quad , \text{ d'après } (4).$$

La formule d'Itô donne alors, pour $t<L$:

$$\log Z_L^L = \log Z_t^L + \int_t^L \frac{1}{Z_u^L} d\tilde{M}_u^L + \frac{1}{2}\int_t^L \frac{d\langle M^L\rangle_u}{(Z_u^L)^2} - \int_t^L \frac{1}{Z_u^L} dA_u^L .$$

On en déduit :

$$E\left[\frac{1}{2}\int_t^L \frac{d\langle M^L\rangle_u}{(Z_u^L)^2} \,\Big|\, \mathcal{F}_t^L\right] 1_{(t<L)} \leq \log\frac{1}{Z_t^L} + E\left[\int_t^L \frac{dA_u^L}{Z_u^L} \,\Big|\, \mathcal{F}_t^L\right] 1_{(t<L)}$$

Cette dernière espérance conditionnelle est égale à :

$$\frac{1}{Z_t^L} E\left[\int_t^L \frac{dA_u^L}{Z_u^L} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] 1_{(t<L)} = \frac{1_{(t<L)}}{Z_t^L} E\left[\int_t^\infty dA_u^L \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = \frac{1_{(t<L)}}{Z_t^L} Z_t^L \leq$$

2. Démonstration des inégalités $(2)_p$.

A toute variable $L : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, associons les expressions :

$$\Lambda_1(L) = 1 + \left(\int_0^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2}\right)^{1/2} \quad ; \quad \Lambda_2(L) = 1 + \log\frac{1}{I_L} .$$

Proposition 2 : Pour tout $p \in]0,\infty[$, il existe une constante universelle c_p telle que, pour $i=1,2$, et pour toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale, nulle en 0, on ait

$$(7)_p \quad \begin{array}{ll} a) & \| X^*_L \|_p \leq c_p \, \| \langle X \rangle_L^{1/2} \, \Lambda_i(L) \|_p \\ b) & \| \langle X \rangle_L^{1/2} \|_p \leq c_p \, \| X^*_L \, \Lambda_i(L) \|_p \end{array}$$

~~Démonstration~~ (toutefois, pour $i=2$ et $p \in]0,1[$, on se restreint au cas où $P(L=T>0)=0$ pour tout temps d'arrêt T).

Démonstration : – Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer a), car b) est une conséquence facile de a), et de l'identité : $X_t^2 = 2\int_0^t X_s \, dX_s + \langle$

– Dans le cas $i=1$, a) découle de la formule (4), de l'inégalité de Kunita-Watanabe, et des inégalités de Burkholder Gundy dans L^p ($p \in]0,\infty[$) appliquées à $\tilde{X}$, qui est une $(\mathcal{F}_t^L)$ martingale local continue de processus croissant $\langle X \rangle_{\cdot \wedge L}$.

– Dans le cas $i=2$, introduisons tout d'abord T, $(\mathcal{F}_t^L)$ temps d'arrêt tel que $T \leq L$. La formule (4) implique :

$$X_{t\wedge T} = \tilde{X}_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} \frac{d\langle X, M^L\rangle_s}{Z_s^L}$$

Pour $p \in [1,\infty[$, les inégalités de Burkholder-Gundy et l'inégalité $(3)_p$ entraînent : $\| X^*_T \|_p \leq c_p \, \| (1+\rho_{L,T}) \langle X \rangle_T^{1/2} \|_p$,

où $\rho_{L,T} \equiv \operatorname{ess\,sup}_t E\left[\int_t^T \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^L \right] 1_{(t<T)}$.

L'inégalité (6) montre que $\rho_{L,T} \leq 2\left(1 + \log \frac{1}{I_T^L}\right)$, où $I_T^L \equiv \inf_{t<T} Z_t^L$

L'inégalité a) est maintenant démontrée pour $s=2$, et $p\geq 1$, en prenant $T=L$.
Dans le cas où $p\in]0,1[$, les majorations précédentes permettent, lorsque Z^L est continue, d'appliquer la relation de domination de Lenglart [11], ce qui entraîne le résultat cherché.

Théorème 3 : Pour tout $p\in]0,\infty[$, et toute fonction de Young Φ, on a : pour toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale (X_t), et tout temps L ≥,

$$(2)_p \quad E[(X^*_L)^p]\leq \gamma(p,\Phi)\,\|\langle X\rangle_L^{p/2}\|_\Phi \; ; \; E[\langle X\rangle_L^{p/2}]\leq \gamma(p,\Phi)\,\|(X^*_L)^p\|_\Phi$$

où l'on note (voir (1.2)) : $\gamma(p,\Phi)=c_p(\|1\|_\Psi+r_p(\Psi))$,
c_p étant une constante universelle suffisamment grande, et Ψ désignant la fonction de Young conjuguée de Φ.

Démonstration : 1) Il suffit de démontrer les inégalités $(2)_p$ lorsque L satisfait la condition : $P(L=T)=0$, pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T. En effet, si l'on introduit[1] une variable auxiliaire V indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, mais $\mathcal{F}$ mesurable (ce que l'on peut toujours faire, quitte à élargir $\mathcal{F}$, car $\mathcal{F}_\infty$ n'est pas nécessairement égale à $\mathcal{F}$), et uniformément distribuée sur $[0,1]$, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $L_\varepsilon=L+\varepsilon V$ satisfait la condition en question, et les inégalités $(2)_p$ pour L sont obtenues par passage à la limite, lorsque $(\varepsilon\to 0)$, à partir des inégalités $(2)_p$ pour L_ε.

2) Supposons donc que L satisfasse la condition en question.

(1) Cet argument m'a été suggéré par J. Pitman, que je remercie.

les inégalités $(2)_p$ découlent alors des inégalités $(7)_p$ appliquées avec $i=2$, de l'inégalité de Hölder généralisée : $E[AB] \leq 2 \|A\|_{\Psi} \|B\|_{\Phi}$, et du fait que la variable I_L est uniformément distribuée sur $[0,1]$ (lemme 1).

3. ~~Remarques~~ Compléments.

(3-1) Relations avec la décomposition de Williams des trajectoires browniennes.

L'exemple suivant est, pour l'essentiel, à l'origine des résultats de ce travail. (B_t) désigne le mouvement Brownien réel issu de 0, $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$, et $L = \sup\{t \leq T_1 : B_t = 0\}$. Jeulin ([J], p. 99) a remarqué que $Z_t^L = 1 - B_{t\wedge T_1}^{+}$, et donc $I_L = 1 - \sup_{t\leq L} B_t$. Or, le premier pas dans la décomposition de Williams ([13], [14]) des trajectoires de B sur $[0, T_1]$ est que la variable : $\sup_{t\leq L} B_t$ est uniformément distribuée sur $[0,1]$ (ainsi donc que I_L, comme l'affirme de façon générale le lemme 1).

Nous allons voir que la décomposition de Williams admet une version "abstraite" (propositions 4 et 5 ci-dessous) dans le cadre général du grossissement avec L, version qui permettra peut-être d'affiner les résultats ci-dessus. Pour simplifier la discussion, nous supposons, outre l'hypothèse (C) toujours en vigueur, que :

(i) pour tout $(\mathcal{F}_t)$ t.a. T, $P(L=T)=0$.

(ii) L est la fin d'un ensemble $(\mathcal{F}_t)$ optionnel ($\equiv$ prévisible, sous l'hypothèse (C)).

Rappelons que, sous ces conditions :

(8) <u>la surmartingale Z^L est continue</u> ; $Z_L^L = 1$;

la mesure aléatoire dA_s^L est portée par $\{s : Z_s^L = 1\}$, lui même contenu dans $[0,L]$.

(voir Azéma [1], et $[J]_3$: lemme (4,3), p. 62 ; proposition (5,1), p. 73)

Remarquons encore que, sous ces conditions, l'inégalité (6) : $\rho_L(t) \leq 2(1+\log$ sur $\{t<L\}$, qui joue un rôle important dans la démonstration du théorème 3, est en fait une égalité !

Introduisons maintenant la variable $\rho \equiv \sup\{t \leq L : Z_t^L = I_L\}$. La propositi[on] suivante nous semble contenir en particulier une traduction "abstraite" adéquate de la décomposition de Williams sur $[0,\rho]$.

Proposition 4 : (X_t) désigne une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale. Alors :

a) il existe $(\tilde{X}_t)$ $\{\mathcal{F}_t^{L,\rho}\}$ (1) martingale locale telle que :

$$(9) \qquad X_{t\wedge L} = \tilde{X}_t + \int_0^t 1_{(\rho<s<L)} \frac{d\langle X, M^L\rangle_s}{(Z_s^L - I_L)}.$$

b) $(X_{t\wedge\rho})$, qui est donc une $\{\mathcal{F}_t^{L,\rho}\}$ martingale locale, est également une $\{\mathcal{F}_t^{\sigma(I_L)}\}$ (2) martingale locale.

c) $$\rho \equiv \inf\{t : Z_t^L = I_L\}.$$

Démonstration (inspirée étroitement de [J], p. 100-110, ainsi que le reste de ce paragraphe).

1) Remarquons tout d'abord que $Z_t^\rho = I_t \equiv \inf_{s\leq t} Z_s^L$.

---

(1) $\{\mathcal{F}_t^{L,\rho}\}$ est la plus petite filtration contenant $\{\mathcal{F}_t\}$, et faisant de L et ρ deux t.a

(2) $\{\mathcal{F}_t^{\sigma(U)}\}$ désigne la filtration obtenue à partir de $\{\mathcal{F}_t\}$, par adjonction initiale de la tribu engendrée par U.

En effet, pour tout $\{\mathcal{F}_t\}$ t.a T, on a, en notant $T' = \inf\{t > T : Z_t \leq I_T$

$P(T < \rho) = P(T' < L) = E[Z_{T'}] = E[I_T]$.

2) La partie martingale de Z^ρ est donc constante, et a) est alors une conséquen

de la formule (5,19'), p. 88 de [J].

3) Suivons maintenant la remarque (4,16') de [J] : A^ρ étant continu,

la variable ρ est un $\{\mathcal{F}^\rho_t\}$ t.a totalement inaccessible, et la projection duale

$\{\mathcal{F}^\rho_t\}$ prévisible de $1_{(0<\rho\leq t)}$ est $C_t \equiv \int_0^{t\wedge\rho} \frac{1}{Z^\rho_s}\, dA^\rho_s = \int_0^{t\wedge\rho} \frac{1}{I_s}\, d(1-I_s) = -\log I_($

D'après Azéma [1] (cf [J], proposition (3,28)), on a alors : $\rho = \inf\{t : C_t = C_\rho\}$,

d'où c), et $(X_{t\wedge\rho})$ est une $\{\mathcal{F}_t^{\sigma(C_\rho)}\}$ martingale, d'où b).

<u>Remarque</u> : On déduit du résultat général d'Azéma [1] sur les temps d'arrêt

totalement inaccessibles (cf [J], proposition (3,28)), que $C_\rho \equiv -\log I_L$ a pour

loi la loi exponentielle de paramètre 1, ce qui donne une autre démonstration du

fait que I_L est uniformément distribuée sur $[0,1]$.

3) D'après [J], p. 80, pour toute $\{\mathcal{F}_t\}$ martingale locale X, il existe $\tilde{X}$, $\{\mathcal{F}^L_{(L+t)}\}$ martingale locale telle que :

$$X_{L+t} - X_L = \tilde{X}_t - \int_0^t \frac{d\langle X, M^L\rangle_{L+s}}{(1-Z^L_{L+s})}.$$

Le résultat cherché découle alors de l'identité : $-1 + Z^L_{L+t} = M^L_{L+t} - M^L_L$.

Remarque: A la suite des inégalités $(2)_p$ qui concernent les $\{\mathcal{F}_t\}$-martingales arrêtées à L, il est naturel d'espérer pouvoir montrer au moins l'analogue "faible" suivant, qui concernerait les $\{\mathcal{F}_t\}$ martingales après L :

(?) pour tout $p > 1$, il existe une constante c_p telle que, pour toute $\{\mathcal{F}_t\}$ martingale (X_t), et tout temps L, on ait :

$$E\left[\sup_{t\geq 0} |X_{t+L} - X_L|\right] \leq c_p \left\|\left(\langle X\rangle_\infty - \langle X\rangle_L\right)^{1/2}\right\|_p.$$

Nous ne savons pas pour l'instant si une telle inégalité a lieu, mais la suite suggère une réponse négative... Quoiqu'il en soit, le genre de majorations faites avant L est inapplicable ici, car on a :

$$(11) \qquad \int_{L+} \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(1-Z^L_s)^2} \equiv \infty, \quad P\ p.s.$$

Ceci découle immédiatement de la dernière partie de la proposition 5, et du fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\langle M^L\rangle_{L+\varepsilon} - \langle M^L\rangle_L > 0$, P p.s. (sinon, on aurait $Z^L_{L+\varepsilon} = 1$, ce qui n'est pas possible).

(3.2) Les inégalités $(2)_p$, comme cas particulier d'inégalités de martingales avec poids.

La formule (4), qui explicite la décomposition canonique de la semi-martingale $(X_{t\wedge L})$ dans la filtration $\{\mathcal{F}_t^L\}$, a un air de parenté évident avec la formule de Girsanov. A partir du travail de Kunita [10] et de suggestions d'Azéma, Ch. Yoeurp [15] a donné une interprétation mathématique de la remarque précédente en obtenant un théorème de Girsanov généralisé dans le cadre des mesures de Föllmer, englobant en particulier la théorie du grossissement jusqu'à L.

Conformément à la fin de l'Introduction, nous n'étendons pas ici le théorème 3 dans le cadre général de l'étude de Yoeurp, mais nous restons dans le cadre classique ~~de l'étu~~ du théorème de Girsanov.

Soient donc P et Q deux probabilités équivalentes sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose encore la condition (C) satisfaite pour $((\mathcal{F}_t), P)$ (elle l'est alors en conséquence pour $((\mathcal{F}_t), Q)$). On note $\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ (version continue).

La version adéquate du théorème 3, et du lemme 1, est alors le

Théorème 6 : 1) Si l'on note $I = \inf_t Z_t$, on a, pour tout $b \in]0,1[$, $Q(I < b) \leq b$.

2) Pour tout $p \in]0,\infty[$, et toute fonction de Young Φ on a, pour toute $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$ martingale (X_t), et tout temps L :

$(2')_p$ $E_Q[(X^*_\infty)^p] \leq \gamma(p,\Phi) \| \langle X \rangle_\infty^{p/2} \|^Q_\Phi$;

$E_Q[\langle X \rangle_\infty^{p/2}] \leq \gamma(p,\Phi) \| (X^*_\infty)^p \|^Q_\Phi$,

le symbole $\|V\|^Q_\Phi$ désignant la L^Φ-norme de V, sous la probabilité Q.

La démonstration du théorème 6 se calque sur celle du théorème 3, les rôles joués par les couples $[(\{\mathcal{F}^L_t\}, P); (\{\mathcal{F}_t\}, P)]$ d'une part, et la surmartingale (Z^L_t) d'autre part, étant joués maintenant par les couples $[(\{\mathcal{F}_t\}, Q); (\{\mathcal{F}_t\}, P)]$ et par la martingale (Z_t). Remarquons toutefois que, dans ce cadre, la variable I ne peut pas être uniformément distribuée sous Q, car $P(I>0)=1$.

(3.3) Comparaison des propriétés d'intégrabilité de $\Lambda_1(L)$ et $\Lambda_2(L)$.

La proposition suivante montre que les multiplicateurs $\Lambda_i(L)$ $(i=1,2)$ qui figurent dans les inégalités $(7)_p$ ont de bonnes propriétés d'intégrabilité; elle indique également que, quitte à modifier la fonction γ, on pourrait démontrer les inégalités $(2)_p$, lorsque Φ est comodérée, simplement à l'aide de l'inégalité de Kunita-Watanabe, sans utiliser l'inégalité de Fefferman $(3)_p$.

Proposition 7: Soit Ψ fonction de Young, et L variable ≥ 0, $\mathcal{F}$-mesurable.

Alors:

1) $\| \log \frac{1}{I_L} \|_\Psi \leq r_1(\Psi)$.

2) si, de plus, Ψ est modérée, d'indice α, on a:

$$\frac{1}{\alpha} \left\| \int_0^\infty \frac{d\langle M^L\rangle_s}{Z^L_s} \right\|_\Psi \leq \left\| \int_0^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z^L_s)^2} \right\|_\Psi \leq 4\alpha \left\| 1+\log\frac{1}{I_L} \right\|_\Psi \leq 2\alpha(\|1\|_\Psi + r_1(\Psi$$

3) Supposons que Ψ soit comodérée et, en outre, que

les conditions (i) et (ii) du paragraphe (3·1) soient satisfaites pour L. Alors, il existe $c_{\Psi} > 0$, ne dépendant que de Ψ, telle que :

$$\left\| 1 + \log \frac{1}{I_L} \right\|_{\Psi} \leq c_{\Psi} \left\| \int_0^L \frac{d\langle M^L \rangle_s}{(Z_s^L)^2} \right\|_{\Psi}.$$

Démonstration : α) Il suffit bien sûr de supposer $r_1(\Psi) < \infty$. Soit donc $a < \infty$, tel que : $\int_0^1 dx\, \Psi\left(\frac{1}{a} \log \frac{1}{x}\right) \leq 1$. On a alors, pour tout $y \leq 1$:

$1 \geq \int_0^y dx\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right) \geq y\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{y}\right)$, et donc : $\lim_{y \to 0} y\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{y}\right) = 0$

β) a conservant la même signification qu'en α), remarquons que l'on a :

$$E\left[\Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{I_L}\right)\right] = \int d(P(I_L < x))\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\int d\left(\Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right)\right) P(I_L < x),$$

par intégration par parties, avec l'aide de α). On a donc, d'après le lemme 1

$$E\left[\Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{I_L}\right)\right] \leq -\int_0^1 d\left(\Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x = \int_0^1 dx\, \Psi\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{x}\right)$$

d'après le raisonnement précédent. On en déduit 1).

γ) La première inégalité qui figure en 2) découle de ce que la projection duale prévisible (relative à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$) du processus croissant $\int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2}$ est $\int_0^t \frac{d\langle M^L\rangle_s}{Z_s^L}$; on applique alors l'inégalité (100·2), p. 183 de [4]. La seconde inégalité provient de ce que le potentiel (dans la filtration $\{\mathcal{F}_t^L\}$) engendré par le processus croissant $\int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2}$ est majoré par $2\left(1+\log\frac{1}{I_L}\right)$ (voir le lemme 1) ; on applique alors l'inégalité (100·3) p. 183 de [4] (voir Burkholder-Davis-Gundy [3] ; Garsia [5] ; Neveu [11], p. 219).

δ) Comme cela a été remarqué dans le paragraphe (3·1), on a, sous les hypothèses indiquées :

$$\rho_L \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t \leq L} E\left[\int_t^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2} \Big| \mathcal{F}_t^L\right] = 2\left(1 + \log\frac{1}{I_L}\right).$$

Ainsi, $2\left(1+\log\frac{1}{I_L}\right) \leq \operatorname*{ess\,sup}_t E\left[\int_0^L \frac{d\langle M^L\rangle_s}{(Z_s^L)^2} \Big| \mathcal{F}_t^L\right]$,

ce qui entraine 3), d'après l'inégalité de Doob dans L^Ψ (cf : Neveu [ ] p. 217).

Remarque : l'inégalité ~~~~ 1) de la proposition 7 permet de démontrer l'inégalité (2) directement, sans passer par l'approximation de L par les variables L_ε (voir la démonstration du théorème 3).

Références :

[1] J. Azéma : Quelques applications de la théorie générale des processus - I - Inv. Math. 18 (293-336), 1972.

[2] M. T. Barlow : Study of a filtration expanded to include an honest time. Z. f. W. 44 (307-323), 1978.

[3] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy : Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. 6th Berkeley Symp. 2, (223-240), 1972.

[4] C. Dellacherie - P. A. Meyer : Probabilités et Potentiel. Théorie des martingales - Hermann (1980).

[5] A. M. Garsia : Martingale inequalities : seminar notes on recent progress. Benjamin, Reading (1973).

[6] T. Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Maths 833, Springer (1980).

[7] T. Jeulin, M. Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. Ann. Scient. ENS, 4e Série, 11, (429-443), 1978.

[8] N. El Karoui, M. Chaleyat-Maurel: Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. Cas continu. Astérisque 52-53, (117-144), 1978.

[9] H.P. McKean: Stochastic Integrals. Academic Press (1969).

[10] H. Kunita: Absolute continuity of Markov processes. Sém. Proba X, (44-77), 1976, Springer Lecture Notes 511.

[11] E. Lenglart: Relation de domination entre deux processus. Ann. I.H.P. 13, 1977.

[12] J. Neveu: Martingales à temps discret. Masson - Paris (1972).

[13] D. Williams: Diffusions, Markov processes and Martingales - Wiley (197

[14] D. Williams: Path decomposition and continuity of local time for one dimensional diffusions I, Proc. London Math Soc 3 (1

[15] Ch. Yoeurp: Thèse de Doctorat d'Etat. Univ. P. et M. Curie - Paris (198