Martingale d'Azéma et inversion du temps.

November 1988.

1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0.
On note $\hat{\mathcal{F}}_t = \sigma\{B_u, u \geq t\}$ la filtration, décroissante en t, du futur de B après l'instant t.
Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\left(\exp\left\{ \lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t} \right\}, t > 0 \right)$$
est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale. Voici deux démonstrations de ce résultat :
- on peut remarquer que, pour $s < t$, la variable $B_s - \frac{s}{t} B_t$ est indépendante de $\hat{\mathcal{F}}_t$, d'où l'on déduit aisément :
$$E\left[\exp\left(\lambda \frac{B_s}{s} - \frac{\lambda^2}{2s} \right) \Big| \hat{\mathcal{F}}_t \right] = \exp\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t} \right)$$
- ou bien, on remarque que $\hat{\mathcal{F}}_t = \hat{\mathcal{B}}_{1/t}$,
où $\hat{\mathcal{B}}_u = \sigma\left\{ \hat{B}_s \equiv s B_{1/s} \,;\, s \leq u \right\}$, et donc :
$$E\left[\exp\left(\lambda \frac{B_s}{s} - \frac{\lambda^2}{2s} \right) \Big| \hat{\mathcal{F}}_t \right] = E\left[\exp\left(\lambda \hat{B}_{1/s} - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{s}\right)\right) \Big| \hat{\mathcal{B}}_{1/t} \right]$$
$$= \exp\left(\lambda \hat{B}_{1/t} - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \exp\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t} \right).$$

2. Récemment, Azéma a mis en évidence une martingale remarquable :
$$\mu_t = \operatorname{sgn}(B_t)\sqrt{t - g_t} \quad , \quad \text{où } g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\},$$
relative à la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{g_t} \vee \sigma\{\operatorname{sgn}(B_t)\}$.
En nous inspirant du paragraphe précédent, nous allons identifier et étudier une martingale inverse pour la filtration décroissante

$$\hat{\mathcal{G}}_t = \sigma\{B_{d_t+u}\,;\,u \geq 0\} \vee \sigma\{d_t\} \vee \sigma\{\mathrm{sgn}(B_t)\},$$

où $d_t = \inf\{u \geq t : B_u = 0\}$.

Pour cela, remarquons que : $\hat{\mu}_t = \mathrm{sgn}(\hat{B}_t)\sqrt{t - \hat{g}_t}$

est une $\mathcal{H}_t \equiv \hat{\mathcal{B}}_{\hat{g}_t} \vee \sigma\{\mathrm{sgn}(\hat{B}_t)\}$ - martingale (on note $\hat{g}_t = \sup\{s \leq t : \hat{B}_s = 0\}$)

En conséquence, $(\hat{\mu}_{1/s}, s > 0)$ est une $\mathcal{H}_{1/s}$ - martingale inverse.

Identifions maintenant, d'une part $\hat{\mu}_{1/s}$, et d'autre part $\mathcal{H}_{1/s}$.

On a : $\hat{\mu}_{1/s} = \mathrm{sgn}(B_s)\sqrt{\frac{1}{s} - \hat{g}_{1/s}}$;

or, $\hat{g}_{1/s} = \sup\{u \leq 1/s : B_{1/u} = 0\} = 1/d_s$.

On a donc : $\hat{\mu}_{1/s} = \mathrm{sgn}(B_s)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{d_s}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu_s$.

D'autre part, on a, de façon légèrement heuristique :

$$\mathcal{H}_{1/s} = \sigma\{B_{1/u}\,;\,\tfrac{1}{u} \leq \hat{g}_{1/s}\} \vee \sigma\{\mathrm{sgn}(B_s)\}$$
$$= \hat{\mathcal{G}}_s.$$

Nous venons ainsi de montrer que $\left(\nu_s \equiv \mathrm{sgn}(B_s)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{d_s}}, s > 0\right)$ est une $(\hat{\mathcal{G}}_s)$ martingale inverse.

Plus généralement, nous avons montré en [ ] que la projection sur $(\mathcal{G}_t)$ de la martingale :

$$\mathcal{E}_t^{\lambda} = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

est :

$$h(\lambda\mu_t)\exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right), \quad \text{où } h(x) = \int_0^\infty d\xi\, \xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2} + \xi x}.$$

En conséquence, la projection de la $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale inverse :

$$\hat{\mathcal{E}}^{\lambda}_{1/t} \equiv \exp\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t}\right)$$

sur la filtration décroissante $(\hat{\mathcal{G}}_t)$ est :

$$h(\lambda \hat{\mu}_{1/t}) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2t}\right) = h(\lambda \gamma_t) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2t}\right)$$

Ce résultat peut également être démontré directement. Les trois tribus $\mathcal{F}_{d_t}$, $\sigma\{B_{d_t+u}, u \geq 0\}$ et $\sigma\{\mathrm{sgn}(B_t)\}$ étant indépendantes, on se ramène à montrer le résultat suivant :

(1) $$E\left[f(|B_1|) \,\middle|\, |\gamma_1| = x\right] = \int_0^\infty d\xi\, \xi\, e^{-\xi^2/2} f(x\xi)$$

Or, à l'aide de l'inversion du temps, on a :

$$\left(|B_1| \Big/ \sqrt{1-\frac{1}{d_1}} \;;\; \sqrt{1-\frac{1}{d_1}}\right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(|B_1| \Big/ \sqrt{1-g} \;;\; \sqrt{1-g}\right)$$

et ces deux couples de variables sont donc constitués de variables indépendantes. On a donc :

$$E\left[f(|B_1|) \,\middle|\, \sqrt{1-\frac{1}{d_1}} = x\right] = E\left[f(|B_1|) \,\middle|\, \sqrt{1-g} = x\right]$$

$$= \int_0^\infty d\xi\, \xi\, e^{-\xi^2/2} f(x\xi), \text{ d'où (1) } //$$

Voici maintenant une seconde démonstration de (1) qui évite totalement de recourir à l'inversion du temps :

la relation (1) équivaut à :

(2) $$E\left[f(B_1^2) \;\middle|\; \frac{d_1-1}{d_1} = x^2 \right] = E\left[f(2x^2 \mathbb{e}) \right]$$

Or, on a :

$$d_1 \equiv \inf\{u \geq 1 : B_u = 0\} = 1 + \inf\{u \geq 0 : B_{u+1} - B_1 = -B_1\},$$

d'où l'on déduit que, conditionnellement à $B_1 = x$,

$$d_1 - 1 \overset{(\text{loi})}{=} x^2 T,$$

où $T = \inf\{u \geq 0 : \gamma_u = 1\}$, et (γ_u) est un mouvement brownien réel issu de 0. On a donc :

(3) $$(B_1^2, d_1 - 1) \overset{(\text{loi})}{=} \left(N^2, \frac{N^2}{N'^2} \right)$$

où N et N' désignent deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

On a donc :

$$\left(B_1^2, \frac{d_1-1}{d_1}\right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(N^2, \frac{N^2/N'^2}{N^2/N'^2 + 1} \right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(N^2, \frac{N^2}{N^2 + N'^2} \right)$$

$$\overset{(\text{loi})}{=} \left(2\mathbb{e} \cos^2\theta \,;\, \cos^2\theta \right)$$

où $\mathbb{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 1, et θ une variable indépendante, uniformément distribuée sur $[0, 2\pi)$.

Le résultat (2) est maintenant immédiat. //.

3. Indépendamment de notre intérêt pour la martingale d'Azéma, et ~~de~~ pour les processus qui s'y rattachent, l'inversion du temps peut permettre d'accéder de façon élémentaire à des résultats sur le mouvement brownien qui nécessitent habituellement l'utilisation de techniques un peu plus sophistiquées.

Nous donnons pour preuve de cette affirmation l'obtention du résultat suivant par inversion du temps :

Si $(B_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0, alors :

$$\left(p(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} B_{ug} \ ; u \leq 1\right)$$ est un pont brownien standard.

Démonstration : Si l'on note $\hat{B}_u = u B_{1/u}$, et $\hat{p}(u) = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{B}_{u\hat{g}}$, on a :

$$\hat{p}(u) = \sqrt{d}\left(\frac{u}{d}\right) B_{d/u} = \frac{u}{\sqrt{d}} B_{d + d\left(\frac{1}{u} - 1\right)}$$

Or, le processus $(B_{d+v} \ ; v \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de d, on a donc, par scaling : $(\hat{p}(u), u \leq 1) \overset{(loi)}{=} \left(u B_{\left(\frac{1}{u} - 1\right)} \ ; u \leq 1\right)$, et on vérifie sans difficulté que le membre de droite est un pont brownien (en considérant la covariance de ce processus gaussien). //

Il serait également intéressant d'avoir accès au méandre brownien à l'aide de l'inversion du temps.