Méandres et processus de Bessel

Novembre 1988

M. Yor.

1. A la suite de l'article de D. Williams [ ], de nombreuses décompositions des trajectoires browniennes et, plus généralement, des trajectoires de diffusions en des instants aléatoires ont été étudiées à l'aide de techniques diverses (propriété de Markov, retournement, grossissement de filtrations...)

L'objet de ce travail est de présenter quelques uns de ces résultats, choisis parmi les plus simples et les plus utiles ; nous considèrerons tout d'abord quelques décompositions de la trajectoire brownienne $(B_u; u \leq 1)$ dans lesquelles le méandre brownien joue un rôle important, puis, dans une seconde partie, nous étudierons les méandres associés aux processus de Bessel de dimension $d < 2$.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0. On note :

$$g = \sup\{s \leq 1 : B_s = 0\} \quad \text{et} \quad d = \inf\{s \geq 1 : B_s = 0\},$$

et on considère les processus :

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{g}} B_{ug} \quad , u \leq 1 ;$$

$$m(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g}} |B_{g+u(1-g)}| \quad , u \leq 1$$

(dans la littérature, m est appelé le <u>méandre brownien</u>) ;

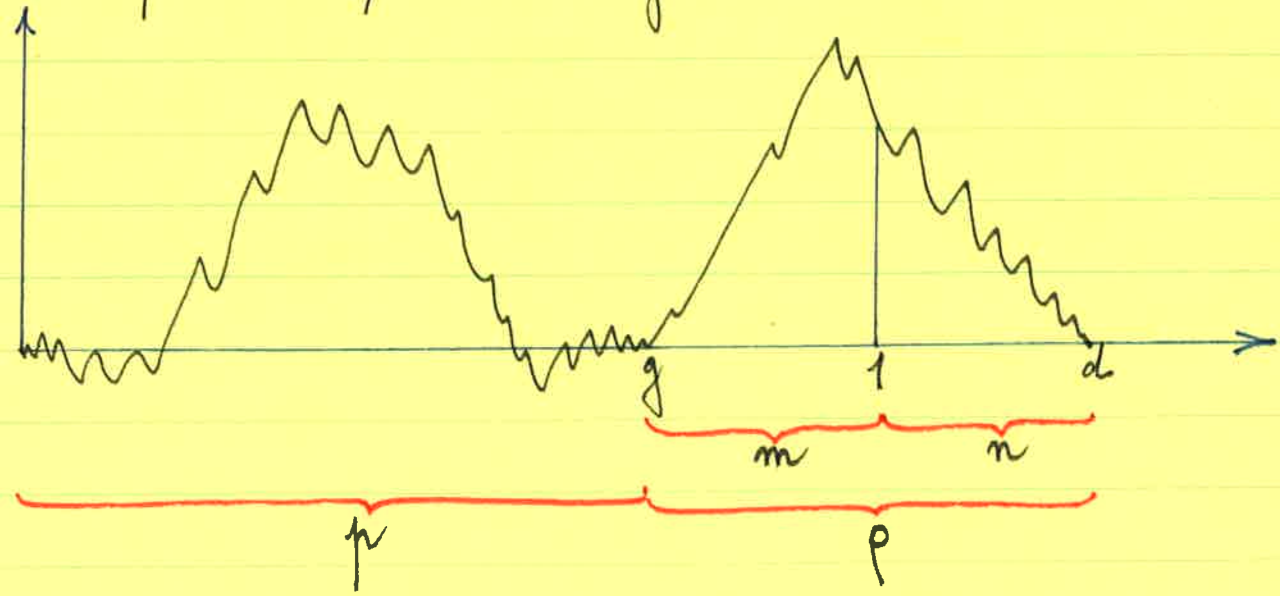
$$\rho(u) = \frac{1}{\sqrt{d-g}} |B_{g+u(d-g)}| \quad , u \leq 1$$

(dans la littérature, ρ est souvent appelé l'<u>excursion brownienne normalisée</u>) ;

$$n(u) = \frac{1}{\sqrt{d-1}} |B_{d-u(d-1)}| \, , u \leq 1 .$$

Soulignons que tous ces processus ont été construits à partir du mouvement brownien, par dilatation d'espace et de temps, de façon à ce qu'ils aient, au moins heuristique-ment, pour variation quadratique u. Comme nous le verrons par la suite de manière rigoureuse, il en est bien ainsi : chacun de ces processus est une semimartingale (au moins dans sa filtration propre) dont la partie martingale est un mouvement brownien.

Dans la figure suivante, chaque accolade indique sur quel intervalle aléatoire le processus correspondant est défini.



2. Décrivons maintenant les lois de ces quatre processus.

Théorème 1: 1) p est un pont brownien standard, indépendant de la tribu engendrée par la variable g et le processus $(B_{g+u}, u \geq 0)$

2) Le processus p est, dans sa filtration propre, une semi-martingale de décomposition canonique:

$$p(u) = q(u) - \int_0^u ds \frac{p(s)}{1-s} \qquad (u \leq 1) \tag{2.a}$$

où $(q(u), u \leq 1)$ désigne un mouvement brownien réel.

Théorème 2: 1) ρ est un pont de Bessel de dimension 3, indépendant de la tribu engendrée par $\mathcal{F}_g$, la variable d, et le mouvement brownien $(B_{d+u}, u \geq 0)$.

2) Le processus ρ est, dans sa filtration propre, une semimartingale de décomposition canonique:

$$(2.b) \qquad \rho(u) = \beta(u) + \int_0^u ds \left(\frac{1}{\rho(s)} - \frac{\rho(s)}{1-s} \right)$$

où $(\beta(u), u \leq 1)$ désigne un mouvement brownien réel.

Théorème 3: Désignons par M et R respectivement les lois du méandre brownien et du processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, considérées comme probabilités sur $C([0,1])$, muni de la tribu $\mathcal{C} = \sigma\{X_u(\omega) \equiv \omega(u), u \leq 1\}$. Alors:

1) M et R sont liées par la relation:

$$(2.c) \qquad M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{X_1} . R$$

En particulier, on a: $(2.c') \qquad M(X_1 \in dx) = x e^{-x^2/2} dx.$

2) Le méandre brownien $(m(u), u \leq 1)$ est, dans sa filtration propre, une semimartingale, de décomposition canonique:

$$(2.d) \qquad m(u) = \gamma(u) + \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{m_s}{\sqrt{1-s}}\right)$$

où $\Phi(a) = \int_0^a dy\, e^{-y^2/2}$, et $(\gamma(u), u \leq 1)$ désigne un mouvement brownien réel.

Théorème 4: Le processus n est indépendant de la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1$ et le mouvement brownien $(B_{d+u}, u \geq 0)$. De plus, si N désigne la loi de n sur $C([0,1], \mathbb{R}_+)$, on a:

$$(2.e) \qquad N = \frac{1}{X_1^2} . R.$$

3. Quelques démonstrations.

Le méandre brownien jouant un rôle essentiel dans l'étude faite en [ ] de la martingale d'Azéma : $\mu_t \equiv \mathrm{sgn}(B_t)\,(t-g_t)^{1/2}$, où $g_t = \sup\{s \le t : B_s = 0\}$, il nous a semblé important de donner plusieurs démonstrations du théorème 3.

(3.1) Une première démonstration consiste à utiliser la théorie du grossissement. Considérons en effet $\mathcal{F}_t^g$, la plus petite filtration contenant $\mathcal{F}_t$ et faisant de g un temps d'arrêt.

Le mouvement brownien $(B_t, t \ge 0)$ est encore une semimartingale dans la filtration $(\mathcal{F}_t^g)$, et sa décomposition canonique s'exprime à l'aide de la $(\mathcal{F}_t)$ surmartingale : $\quad Z_t^g = P(g \ge t \mid \mathcal{F}_t)$

On montre facilement la formule :

$$1 - Z_t^g \equiv P(g < t \mid \mathcal{F}_t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Phi\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) \qquad (t<1)$$

On déduit ensuite des formules de théorie du grossissement (voir Jeulin-Yor [ ], Récapitulatif) la décomposition :

$$(3.a) \qquad |B_{g+u}| = \tilde{\gamma}_u + \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1-(g+s)}}\,\frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{|B_{g+s}|}{\sqrt{1-(g+s)}}\right) \qquad (u < 1-g)$$

où $(\tilde{\gamma}_u, u \ge 0)$ est un $(\mathcal{F}^g_{g+u}, u \ge 0)$ mouvement brownien.

En particulier, $(\tilde{\gamma}_u, u \ge 0)$ est indépendant de $\mathcal{F}_0^g \equiv \mathcal{F}_{g+}$; en conséquence, $\left(\gamma_v \equiv \frac{1}{\sqrt{1-g}}\,\tilde{\gamma}_{v(1-g)} \, ; v \ge 0\right)$ est un mouvement brownien, également indépendant de $\mathcal{F}_0^g$, et l'on déduit ~~de~~ aisément de (3.a) la formule :

$$(2.d) \qquad m_v = \gamma_v + \int_0^v \frac{ds}{\sqrt{1-s}}\,\frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{m_s}{\sqrt{1-s}}\right).$$

Par ailleurs, si l'on désigne par Q la probabilité sur $C([0,1], \mathbb{R}_+)$ définie par :

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{X_1} \cdot R ,$$

on obtient, à l'aide de la formule explicite :

(3.b) $$R\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1} \,\middle|\, \mathcal{C}_u\right) = \frac{1}{X_u}\, \Phi\left(\frac{X_u}{\sqrt{1-u}}\right) \qquad (u<1)$$

(avec $\mathcal{C}_u = \sigma(X_s, s \le u)$)

et du théorème de Girsanov que, sous Q, le processus X admet la même décomposition canonique (2.d) que m. L'équation (2.d) ayant une unique solution trajectorielle, et donc en loi, on déduit de ce qui précède, l'identité :

(2.c) $$M = Q = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{X_1} \cdot R$$

Le théorème 3 est donc entièrement démontré.

<u>Remarque:</u> En [ ], Biane et Yor obtiennent tout d'abord la formule (2.c) par des considérations sur la ~~formule~~ mesure d'Itô ; le théorème de Girsanov permet alors d'obtenir (2.d). ||

(3.2) Dans le sous-paragraphe (3.3), nous donnerons une démonstration tout à fait différente des formules (2.c) et (2.e), qui consistera à s'appuyer sur les relations suivantes entre les processus ρ, m et n, relations que nous déduisons du théorème 2.

<u>Théorème 5</u> : 1) <u>Le processus m s'exprime en fonction de ρ, au moyen de la formule :</u>

(3.b) $$m_u = \frac{1}{\sqrt{V}}\, \rho(uV), \quad u \le 1,$$

<u>où</u> $V = \frac{1-g}{d-g}$ <u>est indépendant de ρ et satisfait :</u>

(3.c) $$P(V \in dt) = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \qquad (t \in (0,1))$$

<u>De plus, conditionnellement à m (fixons en particulier $m_1 = x$),</u>

la loi de : $\frac{1}{V} - 1 \equiv \frac{d-1}{1-q}$ est celle du premier temps d'atteinte de x par un mouvement brownien issu de 0.

2) Le processus n s'exprime en fonction de ρ au moyen de la formule :

(3.d) $$n_u = \frac{1}{\sqrt{\hat{V}}}\,\hat{\rho}(u\hat{V}), \quad u \leq 1,$$

où $\hat{\rho}(v) = \rho(1-v)$, $\hat{V} = 1 - V \equiv \frac{d-1}{d-q}$ est indépendant de ρ (et donc de $\hat{\rho}$) et satisfait :

(3.c') $$P(\hat{V} \in dt) = \frac{dt}{2\sqrt{1-t}}.$$

Les deux parties du théorème 5 relient les processus m et ρ d'une part, et les processus n et ρ d'autre part. En s'aidant maintenant de l'invariance par retournement de la loi de ρ, c'est à dire :

$$(\rho(u), u \leq 1) \overset{(loi)}{=} (\hat{\rho}(u) \equiv \rho(1-u), u \leq 1),$$

on obtient aisément la

Proposition 6 : 1) La loi du couple $(m \equiv (m(u), u \leq 1), V)$ étant décrite dans le théorème 5, on a, pour toute fonction $F : C([0,1], \mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ borélienne, la double égalité :

$$E[F(n_u; u \leq 1)] = E\left[F(m_u; u \leq 1)\sqrt{\frac{V}{1-V}}\right] = E\left[F(m_u; u \leq 1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{m_1}\right]$$

En particulier, on a :

$$E\left[\sqrt{\frac{V}{1-V}} \,\middle|\, m\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{m_1}.$$

2) La loi du couple $(n \equiv (n(u), u \leq 1); \hat{V})$ étant décrite dans le théorème 5, on a, pour toute fonction $F : C([0,1], \mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$, borélienne, la double égalité :

$$E[F(m_u, u \leq 1)] = E\left[F(n_u, u \leq 1)\sqrt{\frac{1-\hat{V}}{\hat{V}}}\right] = E\left[F(n_u, u \leq 1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n_1\right]$$

En particulier, on a :

$$E\left[\sqrt{\frac{1-\hat{V}}{\hat{V}}} \,\middle|\, n\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n_1.$$

(3.3) Nous démontrons maintenant la relation :

$$(2.c) \qquad M = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{X_1}\cdot R$$

comme conséquence de la relation (3.b) $\quad m_u = \frac{1}{\sqrt{V}}\,\rho(uV),\ u \leq 1.$

Pour ce faire, nous utiliserons en outre le

<u>Lemme 7</u> : <u>Soit</u> Π^ν, <u>resp</u>: R^ν, <u>la loi du pont de Bessel de dimension</u> $d = 2(\nu+1)$. <u>On a alors, pour tout</u> $t<1$ <u>et toute fonction borélienne</u>

$F : C([0,t], \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$(3.e) \qquad \Pi^\nu\left[F(X_u, u\leq t)\right] = R^\nu\left[F(X_u, u\leq t)\, h_\nu(t, X_t)\right]$$

<u>où</u> :

$$(3.f) \qquad h_\nu(t,x) = \frac{1}{(1-t)^{\nu+1}} \exp -\frac{x^2}{2(1-t)}.$$

Admettons provisoirement ce lemme, et prouvons maintenant la relation (2.c).
Appliquons alors la relation (3.b) et le lemme 7 avec $\nu = 1/2$ (ou: $d=3$).
On a alors la relation :

$$M\left[F(X_u, u\leq 1)\right] = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}\, \Pi\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{t}}X_{ut}; u\leq 1\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}\, R\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{t}}X_{ut}; u\leq 1\right) h(t, X_t)\right]$$

En utilisant maintenant la propriété d'invariance par scaling de R, on obtient :

$$R\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{t}}X_{ut}; u\leq 1\right) h(t,X_t)\right] = R\left[F(X_u; u\leq 1)\, h(t, \sqrt{t}X_1)\right]$$

d'où l'on déduit :

$$M\left[F(X_u; u\leq 1)\right] = R\left[F(X_u; u\leq 1)\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}\, h(t, \sqrt{t}X_1)\right]$$

On obtient finalement la relation (2.c) en montrant la formule:

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}\, h(t, \sqrt{t}x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{x}.$$

On montre, de la même façon, la formule (2.e) $N = \frac{1}{X^2}\cdot R$, à partir de la relation (3.d) $n_u = \frac{1}{\sqrt{\hat{V}}}\,\hat{\rho}(u\hat{V})$, et de la formule :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{1-t}}\, h(t, \sqrt{t}\,x) = \frac{1}{x^2}. \quad //$$

4. Extensions aux méandres d'indice ν, pour tout $\nu \in (0,1)$.

Soit $\nu \in (0,1)$, et $(b_\nu(s),\ s \geq 0)$ le processus de Bessel, issu de 0, d'indice $(-\nu)$ c'est à dire de dimension : $d_\nu^- = 2(1-\nu)$. On note :

$$g_\nu = \sup\{s \leq 1 : b_\nu(s) = 0\}, \quad \text{et } d_\nu = \inf\{s \geq 1 : b_\nu(s) = 0\},$$

et on pose :

$$m_\nu(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g_\nu}}\, b_\nu\big(g_\nu + u(1-g_\nu)\big), \quad u \leq 1,$$

processus que nous appelons méandre d'indice ν. On désigne par M^ν sa loi sur $C([0,1]; \mathbb{R}_+)$.

Nous allons maintenant étendre au méandre d'indice ν la plupart des propriétés démontrées ci-dessus pour le méandre brownien.

Tout d'abord, à l'aide de la théorie des excursions (par exemple), on montre la relation :

$$(4.a) \qquad M^\nu = \frac{c_\nu}{X_1^{2\nu}} \cdot R^\nu,$$

où $c_\nu = \dfrac{\Gamma(1+\nu)}{2^{1+\nu}}$, et R^ν désigne la loi, sur $C([0,1],\mathbb{R}_+)$ du processus de Bessel d'indice ν, c'est à dire de dimension $d_\nu^+ = 2(\nu+1)$.

On en déduit l'expression de la loi du méandre au temps 1 :

$$(4.a') \qquad M^\nu(X_1 \in d\rho) = \rho\, e^{-\rho^2/2}\, d\rho,$$

et on remarque que cette loi ne dépend pas de ν.

Nous montrons maintenant comment obtenir le méandre d'indice ν à partir du pont de Bessel d'indice ν, et d'une opération de scaling mettant en jeu une variable indépendante. On a là :

<u>Proposition 8</u> : <u>Soit $(\rho_\nu(t), t\le 1)$ le pont de Bessel d'indice ν.</u>
<u>On a alors :</u>

$$(4.b) \qquad (m_\nu(u), u\le 1) \overset{(loi)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{V_\nu}}\,\rho_\nu(uV_\nu);\ u\le 1\right)$$

<u>où V_ν est une variable indépendante de ρ_ν, dont la loi est donnée par :</u>

$$P(V_\nu \in dt) = \nu\, t^{\nu-1}\, dt \qquad (t\le 1).$$

<u>Démonstration</u> : Soit V variable aléatoire à valeurs dans $(0,1)$, indépendante de ρ_ν, telle que :

$$P(V\in dt) = \theta(t)\, dt.$$

Nous allons chercher θ de façon à ce que le processus $\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\rho_\nu(uV); u\le 1\right)$ ait même loi que $(m_\nu(u), u\le 1)$.

A l'aide du lemme 7, on obtient :

$$M\left[F(X_u, u\le 1)\right] = \int_0^1 dt\ \theta(t)\, R^\nu\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{t}}X_{ut}; u\le 1\right) h_\nu(t, X_t)\right]$$

$$= R^\nu\left[F(X_u; u\le 1)\int_0^1 dt\ \theta(t)\, h_\nu(t; \sqrt{t}X_1)\right],$$

et, d'après la relation (4.a), il s'agit de trouver $\theta(t)$ telle que :

$$\int_0^1 dt\ \theta(t)\, h_\nu(t; \sqrt{t}\,x) = \frac{c_\nu}{x^{2\nu}}.$$

En utilisant l'expression explicite, de h_ν donnée par la formule (3-f), cette identité équivaut à :

$$\int_0^1 dt\ \theta(t) \frac{1}{(1-t)^{\nu+1}} \exp - \frac{x^2 t}{2(1-t)} = \frac{c\nu}{x^{2\nu}}$$

En faisant enfin le changement de variables $u = \frac{t}{1-t}$, on voit, par injectivité de la transformation de Laplace, que :

$$\theta(t) = \nu t^{\nu-1}$$

est l'unique solution de l'équation ci-dessus. //.

Extension du théorème 5, pour tout $\nu \in (0,1)$.

1) Soit $(b_\nu(u), u \geq 0)$ processus de Bessel de dimension $d_\nu^- = 2(1-\nu)$.
On pose $g_\nu = \sup\{u \leq 1 : b_\nu(u) = 0\}$, $d_\nu = \inf\{u \geq 1 : b_\nu(u) = 0\}$.
Alors, le processus :
$$\rho_\nu(u) = \frac{1}{\sqrt{d_\nu - g_\nu}}\, b_\nu(g_\nu + u(d_\nu - g_\nu)) \qquad (u \leq 1)$$
est un pont de Bessel d'indice ν, c'est à dire un processus de Bessel de dimension $d_\nu^+ = 2(1+\nu)$, conditionné à valoir 0 au temps 1.

2) Le méandre d'indice ν, c'est à dire :
$$m_\nu(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g_\nu}}\, b_\nu(g_\nu + u(1-g_\nu)) \qquad (u \leq 1)$$
s'exprime en fonction de ρ_ν au moyen de la formule :
$$m_\nu(u) = \frac{1}{\sqrt{V_\nu}}\, \rho_\nu(uV_\nu) \quad , \quad u \leq 1,$$
où $V_\nu = \dfrac{1-g_\nu}{d_\nu - g_\nu}$ est indépendant de ρ_ν et satisfait :
$$P(V_\nu \in dt) = \nu t^{\nu-1}\, dt.$$
De plus, conditionnellement à $\mathcal{F}_1^\nu = \sigma\{b_\nu(u), u \leq 1\}$ (et donc, en particulier, à $m_\nu(1) = x$), la loi de :
$$\frac{1}{V_\nu} - 1 \equiv \frac{d_\nu - 1}{1 - g_\nu}$$
est celle de $T_x^{(-\nu)}$ premier temps d'atteinte de 0 par un processus de Bessel de dimension $d_\nu^- = 2(1-\nu)$, issu de x. (On connait d'ailleurs cette loi, car par retournement : $T_x^{(-\nu)} \stackrel{(\text{loi})}{=} L_x^{(\nu)}$, où $L_x^{(\nu)}$ désigne le dernier temps de passage en x d'un processus de Bessel de dimension $d_\nu^+ = 2(1+\nu)$, issu de 0.).

Démonstration de la dernière assertion:

On a:

$$d_\gamma = 1 + \inf\{u \geq 0 : b_\gamma(1+u) = 0\}$$
$$= 1 + (1-g_\gamma)\inf\left\{v \geq 0 : \frac{1}{\sqrt{1-g_\gamma}}\, b_\gamma(1+(1-g_\gamma)v) = 0\right\}$$

Or, conditionnellement à $\mathcal{F}_1^\gamma$, et en particulier à $m_\gamma(1) = x$, le processus $\left(\frac{1}{\sqrt{1-g_\gamma}}\, b_\gamma(1+(1-g_\gamma)v)\,;\, v \geq 0\right)$ est un processus de Bessel de dimension d_γ^-, issu de x, d'où le résultat. //.

3) Définissons maintenant

$$n_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{d_\gamma - 1}}\, b_\gamma(d_\gamma - u(d_\gamma - 1)) \qquad (u \leq 1)$$

a) On peut tout d'abord énoncer une extension du théorème 4: le processus $(n_\gamma(u), u \leq 1)$ est indépendant de $\mathcal{F}_1^\gamma \equiv \sigma\{b_\gamma(u), u \leq 1\}$, de plus, conditionnellement à $b_\gamma(1) = x$, on a:

$$\left(b_\gamma(d_\gamma - v), v \leq d_\gamma - 1\right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(R_\gamma(v)\,;\, v \leq L_x^{(\gamma)}\right)$$

et donc:
$$\left(n_\gamma(u)\,;\, u \leq 1\right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{L_x^{(\gamma)}}}\, R_\gamma(u L_x^{(\gamma)})\,;\, u \leq 1\right)$$
$$\overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{L_1^{(\gamma)}}}\, R_\gamma(u L_1^{(\gamma)})\,;\, u \leq 1\right)$$

d'où, d'une part, l'indépendance de $(n_\gamma(u), u \leq 1)$ et de $\mathcal{F}_1^\gamma$, et, d'autre part, en se référant à Biane-Le Gall-Yor [ ], le résultat:

$$N^\gamma = \frac{2\gamma}{X_1^{2\gamma}} \cdot R^\gamma.$$

b) Un simple calcul algébrique montre ensuite que

$$n_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{\hat{V}_\gamma}}\, \hat{\rho}_\gamma (u \hat{V}_\gamma)\ , \quad u \leq 1,$$

où $\hat{\rho}_\gamma(v) = \rho_\gamma(1-v)$, $\hat{V}_\gamma = 1 - V_\gamma = \dfrac{d_\gamma - 1}{d_\gamma - q_\gamma}$.

c) De même que précédemment en ce qui concernait la loi de (m_γ, V_γ), nous étudions la loi du couple (n_γ, V_γ) , c'est à dire que nous explicitons la loi de V_γ conditionnellement à n_γ.

A cet effet, remarquons que :

$$\sqrt{V_\gamma} = \frac{\sqrt{1-q_\gamma}}{\sqrt{d_\gamma - 1}}\ \frac{b_\gamma(1)}{b_\gamma(1)} = \frac{n_\gamma(1)}{m_\gamma(1)} .$$

Finalement, conditionnellement à $n_\gamma(1) = x$ (et d'ailleurs à tout le processus n_γ), la loi de $\sqrt{V_\gamma}$ est celle de $\dfrac{x}{m_\gamma(1)}$.

<u>Remarque</u> : La proposition 6 peut encore s'écrire sous une forme plus générale que celle sous laquelle ~~est~~ elle est présentée.

En effet, on a :

$$E\left[F(n_u , u \leq 1; \hat{V}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}\, R\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{t}} X_{ut}\ ; u \leq 1;\ t\right) h(t, X_t) \right]$$

$$= E\left[F(m_u\ ; u \leq 1; V) \sqrt{\frac{V}{1-V}}\ \right]$$
