Sur la loi du nombre de tours effectué par le mouvement Brownien complexe jusqu'en un temps exponentiel indépendant.

1. Soit $(Z_t, t \geq 0)$ mouvement brownien complexe, issu de $z_0 \neq 0$. On note $(\theta_t, t \geq 0)$ la détermination continue de l'argument de $(Z_u, u \leq t)$ autour de 0, telle que $\theta_0 = 0$.

Pour retrouver le résultat asymptotique de Spitzer [ ] :

$$(1) \qquad \frac{2\theta_t}{\log t} \xrightarrow[t \to \infty]{(d)} C_1$$

où C_1 désigne une variable de Cauchy de paramètre 1, Ito-Mc Kean ([ ], Problem , p. 271) commencent par montrer la formule :

pour tous $\beta \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, en notant $a = |z_0|$,

$$E_{z_0}\left[\int_0^\infty dt \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2}t + i\alpha\theta_t\right\}\right]$$

$$(2) \quad = \int_0^a 2b\,db\, K_{|\alpha|}(\beta a) I_{|\alpha|}(\beta b) + \int_a^\infty I_{|\alpha|}(\beta a) K_{|\alpha|}(\beta b)\, 2b\,db$$

$$(3) \quad = \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\beta^2 t}{2}\right) \int_0^\infty \frac{2b\,db}{2t} \exp - \frac{a^2+b^2}{2t} \quad I_{|\alpha|}\left(\frac{ab}{t}\right)$$

où I_γ et K_γ sont les notations usuelles pour les fonctions de Bessel modifiées d'indice γ.

Depuis quelques années, plusieurs études ont été faites sur ces questions, et on sait maintenant :

(i) se passer de tout calcul explicite du type de (2) ou (3) pour montrer (1);
cf : D. Williams [ ], R. Durrett [ ], [ ], P. Messulam et M. Yor [ ], par exemple.

(ii) renforcer l'égalité (3) en :

$$E_{z_0}\left[\exp(i\alpha\theta_t) \mid |Z_t| = b\right] = \frac{I_{|\alpha|}}{I_0}\left(\frac{ab}{t}\right);$$

cf : M. Yor [ ].

2. Il semble cependant intéressant de reprendre et de développer les calculs de Itô-Mc Kean qui mènent à la formule (2), par exemple en tant qu'exercice d'application de la représentation intégrale dégagée en [ ].

Introduisons tout d'abord les notations suivantes :

de paramètre $\frac{m^2}{2}$

a) m est un paramètre > 0, et S_m un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien Z, que l'on suppose désormais issu de 1, pour simplifier les formules ;

b) $\theta_t^- = \int_0^t d\theta_s \, 1_{|Z_s| \leq 1}$; $\theta_t^+ = \int_0^t d\theta_s \, 1_{|Z_s| \geq 1}$;

(L_t) désigne le temps local en 0 de la martingale locale $(\log|Z_t|, t \geq 0)$.

c) (β_t) désigne le mouvement brownien réel tel que :

$$\log|Z_t| = \beta_{C_t}, \quad \text{où} \quad C_t = \int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}.$$

Si (ℓ_t) désigne le temps local en 0 de β, on a également :

$$L_t = \ell_{C_t}.$$

D'autre part, $A_t \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{u : C_u > t\} = \int_0^t ds \exp(2\beta_s)$.

d) $g_t = \sup\{s \leq t : |Z_s| = 1\}$ et $\gamma_u = \sup\{v \leq u : \beta_v = 0\}$.

Clairement, les processus g et γ sont liés par la relation : $g_t = \gamma_{C_t}$.

On se propose d'appliquer la représentation intégrale dégagée en [ ] pour cal-
-culer la loi conjointe de :

$$\theta^-_{(m)} \overset{\text{def}}{=} \theta^-_{g_{S_m}} \; ; \; \theta^+_{(m)} \overset{\text{def}}{=} \theta^+_{g_{S_m}} \; ; \; \tilde{\theta}_{(m)} \overset{\text{def}}{=} \theta_{S_m} - \theta_{g_{S_m}} \; ; \; L_{S_m} \; ; \; |Z_{S_m}|$$

Par skew-product et changement de temps, on se ramène tout d'abord à un problème qui ne porte que sur le mouvement brownien réel β et certaines fonctionnelles de β.
On a, pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$:

$$E\left[\exp\left\{ i(\lambda\theta^-_{(m)} + \mu\theta^+_{(m)} + \nu\tilde{\theta}_{(m)}) - aL_{S_m} + i\xi \log|Z_{S_m}| \right\}\right]$$

$$= \frac{m^2}{2} E\left[\int_0^\infty du \; \exp\left\{ -\frac{m^2}{2}A_u + (i\xi+2)\beta_u - a\ell_u \right\} \exp -\frac{1}{2}\left(\lambda^2 \int_0^{\gamma_u} ds \, 1_{(\beta_s \le 0)} + \mu^2 \int_0^{\gamma_u} ds \, 1_{(\beta_s \ge 0)} + \nu^2(u-\gamma_u)\right)\right]$$

$$= \frac{m^2}{2} \int_0^\infty ds \, e^{-as} \, E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^- + \mu^2 \tau_s^+\right)\right] \int_{-\infty}^0 dx \, \exp(i\xi+2)x \quad E_x\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{T_0} + \nu^2 T_0\right)\right]$$

où P_x désigne ici la loi du mouvement brownien réel (β_t) issu de x,
$T_0 = \inf\{t : \beta_t = 0\}$, $\tau_s = \inf\{u : \ell_u > s\}$,

$$\tau_s^+ = \int_0^{\tau_s} du \, 1_{(\beta_u \ge 0)} \quad \text{et} \quad \tau_s^- = \int_0^{\tau_s} du \, 1_{(\beta_u \le 0)}.$$

Le problème est donc ramené aux calculs de :

$$E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^- + \mu^2 \tau_s^+\right)\right] \text{ et de: } E_x\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{T_0} + \nu^2 T_0\right)\right]$$

En ce qui concerne la première expression, on a :

$$E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^- + \mu^2 \tau_s^+\right)\right]$$

$$= E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A^-_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^-\right)\right] E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A^+_{\tau_s} + \mu^2 \tau_s^+\right)\right]$$

où $A^-_t = \int_0^t ds \exp(2\beta_s) 1_{(\beta_s \leq 0)}$ et $A^+_t = \int_0^t ds \exp(2\beta_s) 1_{(\beta_s \geq 0)}$.

De plus, à l'aide de la symétrie en loi du mouvement brownien autour de 0, on a :

$$E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A^-_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^-\right)\right] = E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 \int_0^{\tau_s} ds \exp(-2\beta_s) 1_{(\beta_s \geq 0)} + \lambda^2 \tau_s^+\right)\right]$$

Les calculs explicites sont faits dans le

Lemme :

1) $E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A^+_{\tau_s} + \mu^2 \tau_s^+\right)\right] = \exp -\frac{s}{2}\left(\frac{m K_{\mu+1}(m)}{K_\mu(m)} - \mu\right)$

2) $E_0\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A^-_{\tau_s} + \lambda^2 \tau_s^-\right)\right] = \exp -\frac{s}{2}\left(\frac{m I_{\lambda-1}(m)}{I_\lambda(m)} - \lambda\right)$

3) $E_x\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{T_0} + \nu^2 T_0\right)\right] = \frac{I_\nu(m e^{-x})}{I_\nu(m)}$ $\quad (x \geq 0)$

4) $E_x\left[\exp -\frac{1}{2}\left(m^2 A_{T_0} + \nu^2 T_0\right)\right] = \frac{K_\nu(m e^{-x})}{K_\nu(m)}$ $\quad (x \leq 0)$