Problème de Skorokhod, décomposition de Williams, et théorème de Ray-Knight pour les temps locaux.

1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0. On note $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.
Rappelons comment Azéma-Yor (1979) résolvent le problème de Skorokhod sur $\mathbb{R}$: μ étant une mesure sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\int d\mu(x)\,|x| < \infty \quad \text{et} \quad \int d\mu(x)\, x = 0,$$

le temps d'arrêt :

$$T_\psi \equiv \inf\{t : S_t \geq \psi(B_t)\}, \quad \text{où } \psi(x) = \frac{1}{\mu([x,\infty))} \int_{[x,\infty)} t\, d\mu(t)$$

possède la propriété suivante :
la loi de la variable B_{T_ψ} est μ.

2. Une généralisation de la décomposition de Williams des trajectoires browniennes.

(2.1) On note $\sigma = \inf\{t : B_t = 1\}$. Williams (1974) décompose le mouvement brownien $(B_t, t \leq \sigma)$ en 3 fragments sur les intervalles $(0,\mu)$, (μ, L) et (L, σ), où :

$L = \sup\{t < \sigma : B_t = 0\}$, et μ est l'unique instant t sur $(0,L)$ auquel B_t atteint la valeur $\sup_{u<L} B_u$.

(2.2) Nous nous proposons d'étendre de manière adéquate les résultats de Williams au processus : $(X_u = B_u - f(S_u)\,;\, u \leq \sigma)$
lorsque f varie dans une "bonne" classe de fonctions, en décomposant ce processus en 3 fragments sur les intervalles : $(0, \mu_f)$, (μ_f, L_f) et (L_f, σ),

où $L_f = \sup\{t < \sigma : X_t = 0\}$, et μ_f est l'unique instant t sur $(0, L_f)$ auquel X_t atteint la valeur $\sup_{u<L_f} X_u$.

<u>Conditions imposées à</u> f :

Les conditions suivantes sont certainement un peu trop restrictives, mais elles sont bien agréables pour les calculs :

$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est de classe C^1, et $0 < \inf_u f'(u) \leq \sup_u f'(u) < 1$.

Remarquons maintenant que l'on a :

(i) $\sigma = \inf\{u : X_u = 1 - f(1)\}$

(ii) $\sup_{u<L_f} X_u = S_{L_f} - f(S_{L_f})$, et, par définition : $B_{L_f} = f(S_{L_f})$.

Comme l'a remarqué Pitman (1975), l'utilisation conjointe du théorème de retournement de Williams :

$$(1) \qquad (1 - B_{\sigma-u} ; u \leq \sigma) \overset{(d)}{=} (R_u ; u \leq \Delta_1)$$

où $(R_u, u \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, et
$\Delta_1 = \sup\{t : R_t = 1\}$,
et du théorème de Pitman :

$$(2) \qquad (R_u ; u \geq 0) \overset{(d)}{=} (2S_u - B_u ; u \geq 0)$$

permet de donner une démonstration extrêmement simple de la décomposition de Williams à laquelle il a été fait allusion en (2.1).

En employant la même méthode, on obtient le :

Théorème :

1) Les processus $(X_u, u \leq L_f)$ et $(X_{L_f+u}; u \leq \sigma - L_f)$ sont indépendants, conditionnellement à la variable B_{L_f}

2) Conditionnellement à $B_{L_f} = x$, on a:

$$M_f \equiv \sup_{u \leq L_f} X_u = S_{L_f} - f(S_{L_f}) = f^{-1}(x) - x .$$

De plus, les processus $(X_u, u \leq \mu_f)$ et $(X_{L_f - u}; u \leq L_f - \mu_f)$ sont indépendants et ont respectivement même loi que:

$$(X_u ; u \leq \inf\{t : X_t = f^{-1}(x) - x\}) \text{ et } (B'_u ; u \leq \inf\{t : B'_t = f^{-1}(x) - x\})$$

où (B'_t) désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, indépendant de X.

3) Le processus $(X_{\sigma-u} ; u \leq \sigma - L_f)$ a même loi que

$$(B_u - \Phi(S_u) ; u \leq T \equiv \inf\{t : \Phi(S_t) = B_t\}),$$

où

$$\Phi(s) = 2s + f(1-s) - 1 .$$

Remarque: Les fonctions $(s - \Phi(s))$ et $(s - f(s))$ sont "retournées" l'une de l'autre, c'est à dire:

$$s - \Phi(s) = (1-s) - f(1-s) .$$

(2.3) De façon à pouvoir utiliser les calculs d'Azéma-Yor (1979), pour la résolution du problème de Skorokhod, il nous faut rappeler que, dans les transformations effectuées ci-dessus, le couple $(1 - B_{\sigma-u}, 1 - S_{\sigma-u})$ correspond à $(2S_u - B_u ; S_u)$. On a donc, en conséquence des assertions 2) et 3) du théorème :

$$M_f \overset{(d)}{=} S_T - B_T \overset{(d)}{=} S_T - \Phi(S_T) . \tag{3}$$

Or, la loi de S_T s'exprime simplement en fonction de Φ.
De façon précise, on a :

$$P(S_T \geq x) = \exp - \int_0^x \frac{ds}{1 - \Phi(s)}.$$

On déduit de cette formule et de l'identité (3) la loi de M_f.

3. Extension des théorèmes de Ray-Knight pour les temps locaux.

(3.1) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $g_1(s) \equiv g(s) - s$ soit une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$. On note G_1 l'inverse de g_1.

$(B_t, t \geq 0)$ désigne toujours le mouvement brownien réel, issu de 0 ; on note encore $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, et on désigne par (ℓ_t) le temps local de B en 0.

On a alors le :

Théorème : Le processus des temps locaux de $(g(S_s) - B_s ; 0 \leq s < \infty)$ ou celui de $(g_1(\ell_s) + |B_s| ; 0 \leq s < \infty)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension généralisée $(2G_1(t) ; t \geq 0)$; un tel processus peut être défini comme la solution de l'équation :

$$(4) \qquad Z_t = 2G_1(t) + 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|}\, d\beta_s \qquad (t \geq 0)$$

où $(\beta_s, s \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel.

Remarque : En conséquence du théorème de comparaison, l'unique solution de l'équation (4) est nécessairement à valeurs positives.

Démonstration : On a, pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ borélienne :

$$E\left[\exp - \int_0^\infty ds\, h(g(S_s) - B_s)\right] = E\left[\exp - \int_0^\infty ds\, h(g_1(\ell_s) + |B_s|)\right]$$

à l'aide de l'identité en loi : $(S_t - B_t, S_t) \overset{(d)}{=} (|B_t|, \ell_t)$

D'autre part, si l'on désigne par n_+ la mesure d'Itô[1] des excursions positives, hors de 0, du mouvement Brownien réel, on a :

$$E\left[\exp - \int_0^\infty ds\, h\left(g_1(\ell_s) + |B_s|\right)\right]$$
$$= \exp - \int_0^\infty du \int 2n_+(de)\left[1 - \exp - \int_0^V ds\, h\left(g_1(u) + e(s)\right)\right]$$
$$= \exp - 2\int_0^\infty dG_1(v) \int n_+(de)\left[1 - \exp - \int_0^V ds\, h\left(v + e(s)\right)\right].$$

On conclut à l'aide de l'additivité des lois de carrés de processus de Bessel.

(3.2) Lorsque l'on remplace tout $\mathbb{R}_+$ par l'intervalle $[0,\sigma]$, on obtient la modification suivante du théorème précédent.

<u>Théorème</u> : <u>Outre la fonction</u> g <u>qui vérifie les mêmes hypothèses que ci-dessus</u>, <u>on introduit les fonctions</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>définies par</u> :

$$g_1(\ell) = g(\ell) - \ell \quad \text{et} \quad g_2(\ell) = \ell + g_1(1-\ell)$$
$$\left(\text{on a alors : } g_2(\ell) - \ell\right) = g(1-\ell) - (1-\ell)\Big).$$

<u>Alors, les processus des temps locaux associés aux 4 processus suivants</u> :

$$g(S_s) - B_s \;;\; 0 \le s \le \sigma$$
$$g_1(\ell_s) + |B_s| \;;\; 0 \le s \le \tau \equiv \inf\{t : \ell_t > 1\}$$
$$g_1(1-\ell_s) + |B_s| \;;\; 0 \le s \le \tau$$
$$g_2(S_s) - B_s \;;\; 0 \le s \le \sigma$$

<u>ont tous la même loi qui est celle du carré du processus de Bessel de dimension généralisée</u> $2G_1(v \wedge g_1(1))$.