Problème de Skorokhod et longueurs d'excursions browniennes.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, on note $g_t = \sup\{s < t : B_s = 0\}$ et $(L_t, t \geq 0)$ le temps local de B en 0.

On se propose ici d'appliquer la théorie des excursions à l'étude des lois des temps d'arrêt :

$$(1) \qquad \Lambda_h = \inf\{t : t - g_t \geq h(L_t)\},$$

où $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne, et plus généralement à l'étude des lois de fonctionnelles additives

$$A_u^f = \int_0^u ds\, f(B_s)$$

considérées en Λ_h, ou en : ~~$A_{g_{\Lambda_h}}$~~ g_{Λ_h}.

Il s'agit bien sûr d'une variante assez naturelle de la résolution, pour le mouvement brownien réel, du problème de Skorokhod, au moyen de la construction suivante :

1. Critère de finitude de Λ_h.

Tout d'abord, la loi de L_{Λ_h} est donnée par la formule :

$$(2) \qquad P\left(L_{\Lambda_h} > s\right) = P\left(\Lambda_h > \tau_s\right) = \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right)$$

En conséquence, on a :

i) $P(\Lambda_h > 0) = 1$ ssi $\displaystyle\int_0 \frac{dv}{\sqrt{h(v)}} < \infty$

ii) $P(\Lambda_h = \infty) = 0$ ssi $\displaystyle\int^\infty \frac{dv}{\sqrt{h(v)}} = \infty$.

Dans la suite, on supposera toujours que :

$$(3) \qquad \text{pour tout } A > 0, \quad \int_0^A \frac{dv}{\sqrt{h(v)}} < \infty \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{dv}{\sqrt{h(v)}} = \infty.$$

<u>Démonstration de la formule (2)</u> :

Remarquons que :
$$\left(\Lambda_h > \tau_t\right) = \left(\sup_{u\leq t}\left(\frac{\tau_u - \tau_{u-}}{h(u)}\right) < 1\right)$$

Si l'on pose : $Z_t = 1\left(\sup_{u\leq t}\left(\frac{\tau_u - \tau_{u-}}{h(u)}\right) < 1\right)$,

la formule de compensation de la théorie des excursions nous donne :

$$E\left[Z_t\right] = 1 + E\left[\sum_{s\leq t}(Z_s - Z_{s-})\right] = 1 - E\left[\sum_{s\leq t} Z_{s-}\, 1_{\left\{\frac{\tau_s - \tau_{s-}}{h(s)} \geq 1\right\}}\right]$$
$$= 1 - \int_0^t ds\, E\left[Z_s\right] n\left(V \geq h(s)\right)$$

où $n(d\varepsilon)$ désigne la mesure d'Itô des excursions, et $V(\varepsilon) = \inf\{t > 0 : \varepsilon(t) = 0\}$

On a donc : $P(\Lambda_h > \tau_t) = E[Z_t] = \exp\left(-\int_0^t ds\ n(V \geq h(s))\right)$,
ce qui entraîne la formule (2) $\square$

Nous nous proposons, dans la suite, d'appliquer le théorème d'arrêt en Λ_h à la $(\mathcal{F}_{g_t})$ martingale :

$$(4) \qquad \left\{ \gamma_{g_t} \sqrt{\frac{\pi}{2}(t-g_t)} - \int_0^t dL_s\, \gamma_s \ ;\ t \geq 0 \right\}$$

où (γ_u) désigne un $(\mathcal{F}_t)$ processus prévisible borné.

Pour cela, nous nous proposons de montrer que la martingale :

$$\mu_{t \wedge \Lambda_h} \equiv \mathrm{sgn}(B_u)\sqrt{(u-g_u)}\Big|_{u=(t\wedge\Lambda_h)}$$ est uniformément intégrable.

Cela sera le cas si :

$$(5) \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ E\left[\sqrt{(\Lambda_h - g_{\Lambda_h})}\right] = E[L_{\Lambda_h}] < \infty$$

(les deux conditions $=$ et $<\infty$, doivent être réalisées).

Or, sous l'hypothèse (3), on a bien : $\Lambda_h - g_{\Lambda_h} = h(L_{\Lambda_h})$,
et il s'agit donc de vérifier :

$$(6) \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ E\left[\sqrt{h(L_{\Lambda_h})}\right] = E[L_{\Lambda_h}] < \infty .$$

Or, d'après la formule (2), on a :

$$P(L_{\Lambda_h} \in ds) = \sqrt{\frac{2}{\pi h(s)}}\, ds\ \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right)$$

Le membre de ~~gauche~~ droite de (6) est donc égal à :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty ds\ \frac{s}{\sqrt{h(s)}}\ \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right)$$

Or, par intégration par parties, on a :

$$\int_0^A ds\, s\, \sqrt{\frac{2}{\pi h(s)}}\, \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right)$$

$$= -\, A \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^A \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right) + \int_0^A ds\, \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right)$$

En conséquence, il semble donc (mais cela me surprend un peu*) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (6) ait lieu est que :

$$(7) \qquad \int_0^\infty ds\, \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right) < \infty .$$

---

* non/ les résultats sont bien cohérents.

Admettons que les arguments ci-dessus soient corrects.
Nous allons donc appliquer, comme annoncé, le théorème d'arrêt à (4), au temps Λ_h, pour : $\quad \gamma_u = \theta(L_u)\exp(-A_u^f)$,

où $\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne bornée.
On déduit alors de cette application les résultats suivants :

Proposition : 1. Pour tout processus prévisible (γ_u), à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$E\left[\gamma_{g_{\Lambda_h}} \mid L_{\Lambda_h} = s\right] = E\left[\gamma_{\tau_s} \mid L_{\Lambda_h} \geq s\right]$$

2. En conséquence, on a :

$$E\left[\exp\left(-A^f_{g_{\Lambda_h}}\right) \,\middle|\, L_{\Lambda_h} = s\right] = E\left[\exp\left(-A^f_{\tau_s}\right) \,\middle|\, L_{\Lambda_h} \geq s\right]$$

$$= \exp - \int_0^s dv \int_{(V(\varepsilon) \leq h(v))} n(d\varepsilon) \left\{1 - e^{-A^f_V}\right\}.$$

3. Finalement, on a : $E\left[\exp\left(-A^f_{g_{\Lambda_h}}\right)\right]$

$$= \int_0^\infty ds \sqrt{\frac{2}{\pi h(s)}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s \frac{dv}{\sqrt{h(v)}}\right) \exp\left(-\int_0^s dv \int_{(V(\varepsilon) \leq h(v))} n(d\varepsilon) \left\{1 - e^{-A^f_V}\right\}\right).$$

Démonstration : 1. D'après la formule de balayage, et le théorème d'arrêt, on a :

$$E\left[z_{g_{\Lambda_h}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{h(L_{\Lambda_h})}\right] = E\left[\int_0^{\Lambda_h} dL_u \, z_u\right] = E\left[\int_0^{L_{\Lambda_h}} ds \, z_{\tau_s}\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty ds \, 1_{(L_{\Lambda_h} \geq s)} \, z_{\tau_s}\right]$$

Remplaçons maintenant (z_u) par $(z'_u \equiv \theta(L_u) z_u \,;\, u \geq 0)$; il vient :

$$E\left[z_{g_{\Lambda_h}} \sqrt{\frac{\pi}{2} h(L_{\Lambda_h})} \; \theta(L_{\Lambda_h})\right] = \int_0^\infty ds \, \theta(s) \; E\left[1_{(L_{\Lambda_h} \geq s)} \, z_{\tau_s}\right],$$

formule dont on déduit aisément la première assertion de la Proposition.

2. D'autre part, d'après les formules classiques de théorie des excursions, on a :

$$E\left[1_{(L_{\Lambda_h} \geq s)} \exp\left(-A^f_{\tau_s}\right)\right] = \exp\left(-\int_0^s dv \int n(d\varepsilon) \left\{1 - 1_{(V(\varepsilon) \leq h(v))} \exp\left(-A^f_V\right)\right\}\right)$$

On en déduit aisément la seconde assertion, et finalement à l'aide de (2), la troisième assertion. □.

ie: Relations avec Azéma-Yor, et D-E-Y.

Reprise de la page 4, et dictionnaire :

Dans Dubins-Emery-Y. (Sém. XXIV), nous regardons :

$$T_\varphi = \inf\{t : |B_t| \geq \varphi(L_t)\},$$

et nous montrons : $P\left(L_{T_\varphi} \geq s\right) = P\left(T_\varphi \geq \tau_s\right) = \exp\left(-\int_0^s \frac{du}{\varphi(u)}\right)$. (*)

En conséquence, on a : $L_{T_\varphi} \overset{(\text{loi})}{=} L_{\Lambda_h}$, dès que : $\varphi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\, h(u)}$.

Comme dans la page 4, demandons nous quand la martingale $(B_{t\wedge T_\varphi}, t \geq 0)$ est uniformément intégrable, c'est à dire :

$$(8) \qquad E\left[|B_{T_\varphi}|\right] = E\left[L_{T_\varphi}\right] < \infty$$

A nouveau, nous faisons l'hypothèse : (3') $\forall A > 0$, $\int_0^A \frac{du}{\varphi(u)} < \infty$, et $\int_1^\infty \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$.

Sous cette hypothèse, on a :

$$E\left[L_{T_\varphi} 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] = \int_0^\lambda ds \frac{s}{\varphi(s)} \exp\left(-\int_0^s \frac{du}{\varphi(u)}\right)$$

$$= -\int_0^\lambda ds\, v'(s)\, s, \quad \text{où on a noté : } v(s) = \exp\left(-\int_0^s \frac{du}{\varphi(u)}\right)$$

$$(9) \qquad = -\lambda v(\lambda) + \int_0^\lambda ds\, v(s), \text{ par intégration par parties.}$$

D'autre part, on a, par définition de T_φ :

$$E\left[|B_{T_\varphi}| 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] = E\left[\varphi(L_{T_\varphi}) 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] \left(= \int_0^\lambda ds\, v(s) \right) \text{ d'après } (*).$$

On peut donc réinterpréter (9) en écrivant :

$$(9') \qquad E\left[L_{T_\varphi} 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] = \underbrace{E\left[|B_{T_\varphi}| 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] - \lambda P(L_{T_\varphi} \geq \lambda)}$$

ou encore :

$$(9'') \qquad E\left[|B_{T_\varphi}| 1_{(L_{T_\varphi} \leq \lambda)}\right] = E\left[(L_{T_\varphi}) \wedge \lambda\right].$$

Ainsi, si l'on fait tendre λ vers $+\infty$, on obtient :

$$(10) \qquad E\left[|B_{T_\varphi}|\right] = E\left[L_{T_\varphi}\right] \quad (\leq +\infty).$$

On aura donc l'uniforme intégrabilité de $(B_{t \wedge T_\varphi}, t \geq 0)$ ssi :

$E\left[L_{T_\varphi}\right] < \infty$ (ce qui est assez remarquable ...), et cette condition est précisément : (11) $\displaystyle\int_0^\infty ds \, \underbrace{\exp\left(-\int_0^s \frac{dx}{\varphi(x)}\right)}_{= P(L_{T_\varphi} \geq s)} < \infty$.