Processus à accroissements indépendants et transformation de Fourier

1. Les résultats de cette Note utilisent de façon importante l'inégalité de Hardy dans L^2, que nous commençons par rappeler :

à toute fonction $f \in L^2([0,1])$, on associe la fonction $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x dy\, f(y)$; alors, $Hf \in L^2([0,1])$, et on a :

$$(1) \qquad \int_0^1 dx\, (Hf)^2(x) \leq 4 \int_0^1 dx\, f^2(x).$$

En fait, nous utiliserons cette inégalité sur l'espace de Hilbert $L^2([0,\infty))$, isomorphe à $L^2([0,1])$, au moyen de l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} L^2[0,1] & \longrightarrow & L^2[0,\infty) \\ g & \longrightarrow & \varphi g : x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\, g\left(\log \frac{1}{x}\right) \end{array}$$

La transmuée de H par φ, soit : $\tilde{H} = \varphi^{-1} \circ H \circ \varphi$ applique continûment $L^2([0,\infty))$ sur lui-même, et on a, d'après (1) :

$$(2) \qquad \| \tilde{H} g \|_2 \leq 2 \, \| g \|_2 .$$

On notera simplement G pour $\tilde{H} g$; on a, de façon explicite :

$$G(u) = e^{\frac{u}{2}} \int_u^\infty dv\, e^{-v/2}\, g(v).$$

2. Considérons maintenant $(X_t ; t \geq 0)$ processus à accroissements indépendants, homogène, symétrique, caractérisé par :

$$E\left(e^{i\lambda X_t}\right) = e^{-t\,\Psi(\lambda)} \quad , \text{ où } \Psi(\lambda) \geq 0.$$

On a alors la

Proposition 1: Si $g \in L^2([0,\infty))$, et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$\gamma_\lambda(t) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t ds\, g(s)\, e^{i\lambda X_s}$ converge dans L^2, lorsque $t \to \infty$.
De plus, la variable limite, soit $\Gamma(\lambda)$, satisfait:

$$E\left(|\Gamma(\lambda)|^2\right) \leq \frac{2}{\psi(\lambda)} \int_0^\infty du\, g^2(u).$$

Démonstration: On a, pour $s<t$:

$$E\left[|\gamma_\lambda(t)-\gamma_\lambda(s)|^2\right] = 2\int_s^t du \int_u^t dv\; g(u)g(v)\, e^{-\psi(\lambda)(v-u)}.$$

On peut supposer $g \geq 0$. On a alors:

$$E\left[|\gamma_\lambda(t)-\gamma_\lambda(s)|^2\right] \leq 2\int_s^t du\; g(u) \int_u^\infty dv\; g(v)\, e^{-\frac{c}{2}(v-u)},$$

où l'on a posé $c = 2\psi(\lambda)$. Lorsque l'on fait le changement de variables:
$h = c.u$; $k = c.v$, il vient, en posant: $g_c(h) = g\left(\frac{h}{c}\right)$:

$$E\left[|\gamma_\lambda(t)-\gamma_\lambda(s)|^2\right] \leq \frac{2}{c^2}\int_{cs}^{ct} dh\; g_c(h) \int_h^\infty dk\; g_c(k)\, e^{-\frac{(h-k)}{2}}$$

$$= \frac{2}{c^2}\int_{cs}^{ct} dh\; g_c(h)\, G^c(h),$$

où l'on note G^c la fonction G associée à g_c.
On a donc:

$$E\left[|\gamma_\lambda(t)-\gamma_\lambda(s)|^2\right] \leq \frac{2}{c^2}\left(\int_{cs}^{ct} dh\; g_c^2(h)\right)^{1/2} \|G^c\|_2$$

$$\leq \frac{4}{c}\left(\int_s^t dh\; g^2(h)\right)^{1/2} \|g\|_2.$$

On en déduit, d'une part la convergence dans L^2 de $(\gamma_\lambda(t))$, lorsque $t \to \infty$, et, d'autre part, l'inégalité :

$$E\left(|\Gamma(\lambda)|^2\right) \leq \frac{2}{\psi(\lambda)} \int_0^\infty du\, g^2(u).$$

3. En fait, on peut montrer beaucoup mieux que l'appartenance de $\Gamma(\lambda)$ à L^2 ! On a la :

Proposition 2 : Il existe une constante universelle C telle que :

$$\|\Gamma(\lambda)\|^2_{BMO} \leq \frac{C}{\psi(\lambda)} \int_0^\infty du\, g^2(u)$$

Démonstration : Rappelons tout d'abord que toutes les normes BMO_p sont équivalentes ; c'est la raison pour laquelle nous n'avons précisé ni la norme BMO_p utilisée, ni une valeur de la constante C.

On a :
$$\left|\int_t^\infty ds\, g(s)\, e^{i\lambda X_s}\right|^2 = \left|\int_0^\infty ds\, g(t+s)\, e^{i\lambda(X_{t+s}-X_t)}\right|^2$$

Le processus $(X_{t+s} - X_t\,;\, s \geq 0)$ étant indépendant de $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{X_s\,;\, s \leq t\}$, et ayant même loi que $(X_s\,;\, s \geq 0)$, on a, d'après la proposition 1 :

$$E\left[\left|\int_t^\infty ds\, g(s)\, e^{i\lambda X_s}\right|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] \leq \frac{2}{\psi(\lambda)} \int_0^\infty du\, g^2(u),$$

d'où le résultat annoncé.