Janvier 2002

Une promenade probabiliste

Marc YOR

Université Paris VI - Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires

175, rue du Chevaleret - 75013 PARIS

Cèdant à la demande amicale, mais persistante, de J.P. Kahane, je vais, dans les quelques pages qui suivent, présenter une quinzaine de thèmes probabilistes sur lesquels j'ai travaillé depuis 1973.

Cette présentation suivra, grosso modo, l'ordre chronologique, bien que, souvent, un thème m'ait occupé conjointement avec d'autres (sans rapports apparents).

Il sera beaucoup question, dans les pages qui suivent, du mouvement brownien réel $B_t, t \geq 0$, et de quantités "classiques" qui lui sont associées, par exemple :

$$L_t \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t ds\, 1_{(|B_s| \leq \epsilon)}$$

(: la "mesure du voisinage" définie par Lévy), plus généralement la famille bicontinue de ses temps locaux $\{(L_t^a); a \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$ en un niveau générique $a \in \mathbf{R}$; ainsi : $L_t \equiv L_t^0$.

J'ai rédigé un "Panorama" des résultats importants (tout au moins, de certains d'entre eux, tant la bibliographie est grande...) découverts sur le mouvement brownien entre 1950 et 1995 ([221]*), qu'il pourrait être intéressant de consulter en complément de ce qui suit.

La référence générique [N]* qui figure dans les pages qui suivent renvoie à la liste complète de mes publications datée : Octobre 2001) que j'ai envoyée aux différents membres de la section de Mathématiques.

1. *Préparation* : *processus infinidimensionnels, processus à deux paramètres,...* (1973-77).

(1.1) Suivant les idées de E. Nelson et K. Symanzik, toute une école de physiciens théoriciens cherche à construire à la fin des années soixante et au début

des années soixante dix, des processus de Markov à valeurs dans $S'(\mathbf{R}^{d+1})$ dont la loi soit celle d'un champ quantique (sur $\mathbf{R}^d$) avec interaction. Ces recherches m'amènent tout d'abord à développer, simultanément aux travaux de B. Gaveau, D. Lépingle,..., l'étude de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert, ou de Banach, ([1]*, [2]*).

(1.2) Les mêmes motivations m'amènent à m'intéresser à certaines propriétés du drap brownien $\{B_z; z \in \mathbf{R^d}\}$ (d = 2, en particulier), telles que représentation des martingales [6]∗, processus dits holomorphes [7]*.... Mais, très vite, c'est surtout la possibilité d'étudier l'indice (relatif à $\xi \in \mathbf{C}$) de la trajectoire de $\{B_z, z \in \gamma\}$ pour un lacet γ, lorsque B est un drap brownien complexe, qui m'attire [8]*.

2. *Lois extrémales de martingales.* (1975-77)

(2.1) En 1974, C. Dellacherie relie d'une part la propriété de représentation du mouvement brownien (et du processus de Poisson compensé) à l'extrémalité de la mesure de Wiener (et de celle du processus de Poisson compensé) parmi l'ensemble des lois de martingales.

Je montre, dans ma thèse d'Etat (: Juin 1976) ou, plus exactement, quelques jours après l'avoir soutenue, que ces deux propriétés sont, en toute généralité, équivalentes. L'argument décisif est l'utilisation de la dualité H^1-BMO pour les martingales, et le fait qu'une martingale de BMO est localement bornée. Je montre également que l'espace des intégrales stochastiques par rapport à une martingale donnée est fermé dans L^1. J'étudie, avec C. Dellacherie et P.A. Meyer, (les ensembles relativement compacts pour) la topologie $\sigma(\mathrm{H}^1, \mathrm{BMO})$. droit comme

Ces résultats jouent encore actuellement un rôle important dans l'étude des mesures martingales équivalentes en Mathématiques financières.
(en abrégé : MME), concept fondamental

(2.2) L'intérêt pour les lois extrémales de martingales ne date pas de 1974, mais (au moins !) d'un article de Dubins-Schwarz (1965) sur ce sujet ; dans cet article, les auteurs montrent en particulier que, parmi les martingales continues extrémales, qu'ils représentent comme : $M_t = \beta_{<M>_t}$, avec $(\beta_u, u \geq 0)$ mouvement brownien réel, un sous-ensemble strict est celui des martingales pures, qui satisfont: $< M >_t, t \geq 0$, est mesurable par rapport à β.

Je donne en [45]* des exemples différents (de ceux de Dubins-Schwarz) de martingales continues extrémales, non pures. Dans le même article [45]*, j'énonce une conjecture selon laquelle la filtration de M, extrémale, changée de temps avec l'inverse de $(< M >_t, t \geq 0)$ est nécessairement une filtration brownienne.

Cette conjecture s'avèrera être fausse (cf : travaux de Tsirel'son ; (13.2) plus bas), mais a servi de "point d'appui" à beaucoup d'études sur les filtrations de certaines martingales continues (cf : Notes and Comments du Chap. V de Revuz-Yor [114]*, 3ème édition...) plus petits caractères, comme

3. *Etude des nombres de tours du mouvement brownien complexe* (1977-1990).

(3.1) Ce thème m'a passionné pendant de longues années :

- d'une part, j'étais fasciné par le théorème de Spitzer :

(1) $\frac{2\theta_t}{(\log t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{(\text{Loi})} C_1$, où $(\theta_t, t \geq 0)$ désigne une détermination continue de l'argument du mouvement brownien complexe $(Z_u, u \leq t)$ autour de 0, lorsque $Z_0 \neq 0$, et C_1 est une variable de Cauchy de paramètre 1 ;

- d'autre part, je m'étais rendu compte (dès 1977 ; [8]*) de la coïncidence de l'intégrale d'Itô $\int_0^t f(Z_s)dZ_s$, et de "l'intégrale de chemin" $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} f(z)dz$, lorsque f est une fonction méromorphe, remarque qui a été étendue de façon très générale par Ikeda-Manabe, Malliavin, Bismut, etc...

Ainsi, il m'est apparu rapidement que l'on devrait pouvoir démontrer le théorème de Spitzer (1) en s'appuyant sur les représentations intégrales :

(2) $\theta_t \overset{(a)}{=} Im\left(\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}\right) \overset{(b)}{=} \gamma\left(\int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}\right)$, avec $(\gamma(u), u \geq 0)$ mouvement brownien réel indépendant de la partie radiale $(|Z_s|, s \geq 0)$, la représentation (b) étant la célèbre décomposition en skew-product du mouvement brownien complexe.

- Dans un premier temps, (2) me permet de raffiner les calculs explicites de Spitzer (1958) pour obtenir la loi de θ_t, à l'aide des fonctions de Bessel I_ν ;

- Dans un deuxième temps, en nous appuyant, tout au moins au début, sur un article non publié de D. Williams (1974), j'étudie systématiquement avec P. Messulam, J. Pitman, J.-F. Le Gall... ([65*]; [90*]; [86*], [106]*) des extensions multidimensionnelles de (1) lorsque l'on considère des nombres de tours autour de différents points, ou bien, dans $\mathbf{R}^3$, autour de différentes droites, etc.... Ces travaux sont assez souvent cités par les polyméristes.

Un bilan assez complet de ces résultats est présenté dans : Some Aspects of Brownian Motion, Part I (1992) [134*], voir également, S. Watanabe [A] pour l'étude asymptotique d'intégrales abéliennes le long des trajectoires browniennes, étude qui complète les articles évoqués ci-dessus.

4. *Processus de Bessel ; leur infinie divisibilité et représentation de Lévy-Khintchine.* (1980-1986)

(4.1) La famille des lois des carrés de processus de Bessel est indexée par deux paramètres : $x \geq 0$, valeur initiale, et $\delta \geq 0$, la dimension. On note Q_x^δ la loi de la solution (≥ 0) de l'équation stochastique :

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, d\beta_s + \delta t,\ \ t \geq 0,$$

sur l'espace $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$.

Shiga et Watanabe [E] remarquent, en toute généralité, la propriété d'additivité: $Q_{x'}^{\delta'} * Q_x^\delta = Q_{x+x'}^{\delta+\delta'}$, évidente lorsque δ et δ' sont entiers, puisque, dans ce cas, Q_x^δ est la loi de $\mid a + B_t^{(\delta)} \mid^2, t \geq 0$, avec $a \in \mathbf{R}^\delta, \mid \mathbf{a} \mid^2 = \mathbf{x}$ et $(B_t^{(\delta)}, t \geq 0)$ mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^\delta$.

En nous appuyant sur les théorèmes de Ray-Knight pour les temps locaux browniens, J. Pitman et moi-même (1982 ; [67]* : A decomposition of Bessel bridges) montrons que Q_x^δ admet une représentation de Lévy-Khintchine "explicite", au moyen de la mesure d'Itô des excursions browniennes. Ceci mène à une décomposition des lois des ponts de Bessel, qui peut également être obtenue par le calcul stochastique [68]* (Katata 1981 ; Symposium Taniguchi).

(4.2) Plus tard, en 1986, J.-F. Le Gall et moi-même [88]* montrons l'extension suivante des théorèmes de Ray-Knight :
les temps locaux de $(\mid B_t \mid + \frac{2}{\delta} L_t, t \geq 0)$, en la variable d'espace suivent la loi Q_0^δ, ainsi que des généralisations de ce résultat (voir, également, Biane-Yor [100]*).

5. *Inégalités de martingales, à la Burkholder-Davis-Gundy.*

Pendant quelques années , j'ai souhaité comprendre en "profondeur" ce qui fait "marcher" les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, écrites sous la forme :

pour tout $p > 0$, il existe $0 < c_p < C_p < \infty$ tels que :

$$(BDG) \qquad c_p\, E[T^{p/2}] \leq E\Big[\big(\sup_{s \leq T} \mid B_s \mid\big)^p\Big] \leq C_p\, E[T^{p/2}]$$

où T désigne un temps d'arrêt général.
Cette discussion m'a mené aux études et extensions suivantes :

(i) pour quelles autres fonctionnelles que $(\sup_{s\leq t} \mid B_s \mid)$ a-t-on le même résultat ?

- avec M. Barlow ([55]*, [66]*), nous avons montré que l'on pouvait prendre :

$$L_t^* \equiv \sup_{a\in\mathbf{R}}(L_t^a)$$

- avec M. Barlow et S. Jacka [82]*, nous remplaçons $\sup_{s\leq t} \mid B_s \mid$, par :

$$\sup_{u,s\leq t} \frac{\mid B_u - B_s \mid}{\mid u - s \mid^\alpha}$$ ajouter

pris à une puissance convenable;

(ii) avec les mêmes auteurs, nous montrons comment modifier (BDG) lorsque l'on remplace $f(x) = x^p$ par une fonction f qui n'est pas à croissance modérée ;

(iii) enfin, j'ai étudié le remplacement de T par un temps aléatoire quelconque L dans le cadre de la théorie du grossissement (voir le point 6). gras

6. *Grossissements initiaux et progressifs d'une filtration*

ajouter (6.1) La question suivante, que P.A. Meyer m'a posée à l'automne 1977 : *que devient une martingale* (M_t) *quand on l'arrête en un temps aléatoire quelconque L; reste-t-elle une semimartingale* ?" a été à l'origine de nombreux développements et en particulier de ce qui allait devenir la "théorie du grossissement de filtrations". Cap
Je réponds à cette question en [17]* en montrant que $(M_{t\wedge L}, t \geq 0)$ reste une semimartingale dans la filtration d'origine, grossie pour faire de L un temps d'arrêt.

(6.2) Par contre, il n'est pas vrai, en toute généralité, que, dans cette filtration grossie, $(M_t, t \geq 0)$ reste une semimartingale. C'est vrai sous l'hypothèse supplémentaire que L est "honnête", c'est-à-dire, grosso modo, que L est la fin d'un ensemble prévisible de la filtration d'origine, par exemple un dernier temps de passage d'une filtration d'origine, par exemple un dernier temps de passage d'une diffusion.

Avec T. Jeulin, nous donnons ensuite une forme "explicite" de la décomposition de cette semimartingale dans la filtration grossie ([22]*, [18]*). Puis, T. Jeulin

Springer

rassemble les résultats de ses études portant aussi bien sur le grossissement progressif d'une filtration, que sur le grossissement initial (: on ajoute d'emblée toute l'information dès l'origine des temps) dans son Lecture Notes 833 (1980).

Nous publierons ensuite une série d'articles portant sur les études de grossissement (Lecture Notes 1118 ; 1985) un peu plus tournés vers les applications. Ce volume contient en particulier une première version de mon travail sur les inégalités de martingales arrêtées en un temps quelconque, inégalités obtenues ici à l'aide de la théorie du grossissement.

Une autre approche, qui s'appuie uniquement sur le critère de continuité de Kolmogorov, sera publiée au Jour. Funct. Anal. avec J.M. Bismut [73]*.

7. *Formule de balayage ; application au problème de plongement de Skorokhod.*

(7.1) Une des difficultés, ou un des attraits, du calcul stochastique d'Itô, est que c'est un calcul du "second ordre", i.e :

$$\text{si} \quad f \in C^2(\mathbf{R}), \quad f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds \qquad \text{est une martingale locale.}$$

(souligner)

Il existe toutefois un calcul stochastique du premier ordre, plus rudimentaire, mais néanmoins très utile, que nous avons développé avec Azéma ([30]*, [35]*), et dont voici un exemple : si $\phi \in C^1(\mathbf{R}_+)$, alors, si l'on note $M_t = \sup_{s \le t} B_s$,

$$(\dagger) \qquad \phi(M_t) - \phi'(M_t)(M_t - B_t), t \geq 0, \quad \text{est une martingale locale.}$$

En nous appuyant sur ces martingales, nous obtenons un algorithme "explicite" pour la résolution du problème de Skorokhod sur $\mathbf{R}$; précisément, si μ est une loi de probabilité centrée, avec moment d'ordre 1, alors :

$$T_\mu = \inf\{t : M_t \geq \psi_\mu(B_t)\}, \quad \text{où} \quad \psi_\mu(x) = \frac{1}{\mu([x,\infty))}\Big(\int_{[x,\infty)} t\, d\mu(t)\Big)$$

satisfait $\mathcal{L}(B_{T_\mu}) = \mu$. ([35]*)
De nombreuses variantes, ainsi que d'autres démonstrations - par exemple, à l'aide de la théorie des excursions - seront données à la suite de la publication de ce travail.

(7.2) La formule ($\dagger$) peut bien sûr être obtenue comme conséquence de la formule d'Itô, mais, de façon plus intéressante, comme conséquence de la formule de balayage (*) suivante.

tion de Varadhan (déjà évoqué en 1 (!)) pour la dimension 2, et d'obtenir certains analogues (mais,il s'agit seulement de convergences en loi) en dimension 3. Voir les articles [80]*, [81]*.

Le cours de Saint-Flour de J.F. Le Gall en 1990 décrit l'état des connaissances sur ce sujet ; voir également les Tables Rondes de Saint-Chéron (Bull. Sci. Math. (1992)).

9. Généralisations de la loi de l'arc sinus

10.

11. Valeurs principales des temps locaux browniens (1977-1987-1997).

Les années 77-87-97 représentent trois temps forts pendant lesquels j'ai beaucoup travaillé sur des quantités du type :

supprimer 1/2ε

$$I_t(a) = \int_0^t \frac{ds}{(B_s - a)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\varepsilon \downarrow 0)} \int_0^t \frac{ds}{(B_s - a)} 1_{(|B_s - a| \geq \varepsilon)},$$

l'existence de cette limite étant assurée par le caractère höldérien (d'ordre $\eta < 1/2$) des temps locaux de B, en la variable d'espace.

Toutefois, le processus $(I_t(a), t \geq 0)$ n'est pas à variation finie, mais est de variation quadratique nulle.

(11.1) J'ai, tout d'abord, établi des extensions de la formule d'Itô avec :

$$\varphi_a(x) = (x - a) \log | x - a |$$

faisant intervenir $I_t(a)$ dans la définition du processus de Dirichlet $\{\varphi_a(B_t)\}$
Ces recherches [63]* ont été le pendant français des travaux, sur ce sujet, de T. Yamada au Japon.

(11.2) Je me suis ensuite rendu compte, un peu par hasard, du fait que :
si l'on note $\tau_\ell = \inf\{t : L_t > \ell\}$ l'inverse du temps local en 0, alors le processus

$$\Big(I_{\tau_\ell}(0) \equiv \int_0^{\tau_\ell} \frac{ds}{B_s}, \ell \geq 0\Big)$$

est un processus de Cauchy symétrique. Avec un peu de travail supplémentaire, on peut montrer que :

$$\Big(\frac{1}{\pi} I_{\tau_\ell}(0), \ell \geq 0\Big)$$

est un processus de Cauchy standard $(C_\ell, \ell \geq 0)$

J'ai trouvé ce résultat assez remarquable, une fois comparé avec la représentation de Spitzer de $(C_\ell, \ell \geq 0)$, comme : $(\gamma_{\tau_\ell}, \ell \geq 0)$, où $(\gamma_u, u \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, indépendant de $(\tau_\ell, \ell \geq 0)$.

si (X_t) *est une semimartingale continue nulle en* 0, *et si* $g_t = \sup\{s < t : X_s = 0\}$
alors, pour tout processus prévisible borné z, *ona* :$z_{g_t} X_t = \int_0^t z_{g_s}\, dX_s$

(pour retrouver la formule (†), prendre : $X_t = M_t - B_t$, et $z_{g_t} \equiv z_t = \phi'(M_t)$)

Bien que la formule (∗) soit une simple application du théorème de classe monotone, elle a une certaine "profondeur" : en particulier, elle montre que, si (X_t) est une martingale locale et si l'on modifie, par multiplication, X sur chacune de ses excursions hors de 0, au moyen d'un facteur ne dépendant que du passé avant cette excursion, alors le processus obtenu est encore une martingale locale.
J'ai développé en détail la formule de balayage (∗) et ses nombreuses conséquences en [41]*.

8. *Temps locaux, temps locaux d'intersection.*

(8.1) En France, l'intérêt pour les temps locaux du mouvement brownien, et plus généralement des semimartingales, naît, ou plutôt renaît (si l'on pense à P. Lévy ! l'inventeur de la notion du temps local, qu'il désignait par : mesure du vosinage) avec la parution du cours de P.A. Meyer sur les intégrales stochastiques dans le Séminaire X (1976). Nous éditons ensuite, avec J. Azéma le double volume d'Astérisque (52-53) sur ~~les~~ temps locaux (épuisé depuis longtemps), dans lequel figurent :

de Probabilités Springer

rapprocher

- les conséquences de la formule de balayage (cf. **7.** ci-dessus) pour les temps locaux ;

- plusieurs démonstrations des théorèmes de Ray-Knight sur la propriété de Markov des temps locaux browniens ;

- des discussions du lemme de réflection de Skorokhod, etc....

(8.2) La fin des années 70 et le début des années 80 marquent une bonne compréhension de la notion de temps local, ce qui permet alors à Wolpert, Dynkin, Rosen (1984) de définir les temps locaux d'intersection pour le mouvement brownien plan, mesures aléatoires dont l'existence permettra de bien comprendre les propriétés fines des intersections multiples du mouvement brownien plan.

A la suite de Rosen en particulier, j'obtiens une formule "générale" de Tanaka-Rosen permettant d'écrire un temps local d'intersection comme le dernier terme d'une formule d'Itô. Cette écriture permet de retrouver le résultat de renormalisa-

J'ai obtenu ensuite, par le calcul stochastique, la fonction caractéristique conjointe de $(\tau_\ell, I_{\tau_\ell}(0))$, qui présente une certaine analogie avec la formule de Lévy pour l'aire stochastique du mouvement brownien plan.

A la suite de discussions avec Ph. Biane, nous avons retrouvé ces résultats à l'aide de la théorie des excursions d'Itô, qui s'est avérée bien adaptée à ce type de quantités, car, pour une excursion brownienne $(e_s, s \leq 1)$, qui n'est autre que le pont de Bessel (3), $\int_0^1 \frac{ds}{e_s}$ est bien définie, (et absolument convergente). Voir [91]*.

Ces résultats seront ensuite étendus, dans des cadres différents, pour les processus de Lévy (Bertoin [B] ; Getoor et Fitzsimmons [C]) ou encore les processus de Bessel (Bertoin [D]).

(11.3) L'origine du troisième "temps fort" sur ce thème a été la thèse de L. Alili (Décembre 1995), qui, dès 1993, a obtenu des identités tout-à-fait remarquables concernant la "valeur principale"

$$\int_0^t ds \coth(\lambda B_s)$$

puis $\int_0^1 ds \coth(\lambda e_s)$, où $(e_s, s \geq 1)$ désigne toujours le pont de Bessel (3).

Lorsque l'on considère les moments de cette fonctionnelle, les identités d'Alili se traduisent en des identités entre les nombres de Bernoulli, proches de certaines identités obtenues par Ramanujan. Voir la monographie de Madrid [178]*, et le second volume de Zürich [170]*. Cette piste de recherche, à mon avis très prometteuse pour rapprocher mouvement brownien et théorie analytique des nombres, reste encore inexplorée ---

12. *Fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, et plus généralement des processus de Lévy.* (1989-2001)

ajouter

Les articles dont il est question ici ont été motivés en partie - mais, pas uniquement ! - par le fait que le modèle "classique" utilisé en Mathématiques financières est le mouvement brownien géométrique :

$$(\exp(B_t + \nu t),\ t \geq 0),$$

dont l'intégrale $A_t^{(\nu)} = \int_0^t ds \exp(B_s + \nu s)$, intervient dans le calcul des options dites asiatiques.

(12.1) Entre 1989 et 1992, motivé par les questions de M. Chesney, H. Geman,..., je donne une solution explicite, [128]* modulo une transformation de

Laplace (temporelle) au problème des options asiatiques. Pour cela, j'utilise la représentation de Lamperti des mouvements browniens géométriques à l'aide des processus de Bessel, et les calculs explicites que j'avais déjà faits pour les études de nombres de tours du mouvement brownien complexe (point **3.**).

[Les articles portant sur ces questions viennent d'être rassemblés en un volume de Springer-Finance (2001) ; [ ]*)

(12.2) A l'aide des résultats de (12.1), D. Dufresne remarque une relation intéressante entre les lois de $A_t^{(-\nu)}$ et $A_t^{(\nu)}$, pour t fixé. Nous étendons, avec H. Matsumoto [226]*, ce résultat en une identité en loi entre les processus $(A_t^{(-\nu)}, t \geq 0)$ et $(A_t^{(\nu)}, t \geq 0)$, ou, de façon équivalente, entre les mouvements browniens avec drifts $(+\nu)$ et $(-\nu)$).

(12.3) L'identité de Dufresne ainsi étendue, comme je viens de l'évoquer en *(12.2)*, nous permet ensuite d'obtenir une extension des théorèmes de Lévy (: $(M_t - B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réfléchi) et Pitman (: $(2M_t - B_t, t \geq 0)$ processus de Bessel de "dimension" 3) relative aux fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, sous la forme suivante :

- d'une part, $\exp\Big(-(B_t + \nu t)\Big) \displaystyle\int_0^t ds \exp(B_s + \nu_s)\Big), \; t \geq 0,$

- d'autre part, $\exp(-(B_t + \nu t)) \displaystyle\int_0^t ds \exp 2(B_s + \nu s), \; t \geq 0,$

sont deux diffusions dont on peut expliciter les générateurs infinitésimaux, les semi-groupes, etc...

On retrouve les résultats de Lévy et Pitman par des arguments de scaling, et passage à la limite. Voir [219]*.

13. *Sur certains travaux de Tsirel'son.*

(13.1) Son équation différentielle stochastique.

A la suite du résultat de Zvonkin (1974), selon lequel l'équation stochastique :

$$X_t = B_t + \int_0^t ds\, b(X_s),$$

où b est une fonction borélienne bornée, admet une unique solution forte, c'est-à-dire adaptée à la filtration naturelle de B , Tsirel'son (1975) exhibe une équation stochastique : $X_t = B_t + \int_0^t ds\, T(s, X_\bullet)$ dont la dérive (bornée) $T(s, X_\bullet)$ dépend de "tout" le passé de X, et pour laquelle la solution (unique en loi) n'est pas adaptée par rapport au mouvement B ; Tsirelson procède "par l'absurde". Je montre que certains "bits" d'information de X sont en fait uniformément distribués, et indépendants de B. Cest résultats sont "paradoxaux", et il m'a semblé qu'ils méritaient d'être mieux compris, en particulier parce qu'ils semblent "prouver" la création d'information à partir d'une tribu germe triviale. Voir [108]*

J'ai alors étudié, de façon tout-à-fait générale, une équation à temps discret, le temps variant dans $(-\mathbf{N})$, qui est un squelette de l'équation de Tsirel'son, et pour laquelle on peut discuter explicitement, selon la nature du "bruit" que l'on considère, si les phénomènes paradoxaux dont il a été question précédemment se présentent ou non. Voir [121]*. Ces études sont maintenant prolongées par celles de C. Leuridan ((2002); thèse d'habilitation) montrant l'existence ou la non-existence de marches aléatoires indexées par $(-\mathbb{N})$.

n

(13.2) <u>Les filtrations faiblement browniennes.</u> Pendant l'été 1996, alors que je termine la rédaction de "Zürich II" [170]* (cf : liste des livres publiés), Tsirelson me fait parvenir sa preuve que la filtration naturelle de l'araignée brownienne (à $n(\geq 3)$ branches) n'est pas la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel (et encore moins celle d'un mouvement brownien multidimensionnel).

Ceci est très frappant, car cette filtration naturelle est néanmoins faiblement brownienne, au sens où toute variable de carré intégrable peut être représentée comme intégrale stochastique par rapport à la partie martingale (brownienne) de la distance de l'araignée à l'origine, distance qui est en fait un mouvement brownien réfléchi.

Ensuite, avec M. Barlow et M. Emery (en particulier), nous simplifierons et étendrons ces résultats de Tsirel'son, grâce à des arguments de temps locaux d'une part [189]* et, d'autre part, en donnant l'explication "simple" suivante du fait que la filtration naturelle de l'araignée brownienne ne peut-être une filtration brownienne : en effet, et ceci résoud par l'affirmative une "vieille" conjecture de Barlow (datant de 1987 ?) : si Γ est un ensemble prévisible, et si $L = \sup\{t : (t,\omega) \in \Gamma\}$ alors $\mathcal{F}_{L^+}$ ne peut différer de $\mathcal{F}_{L^-}$ au plus que par un ensemble prévisible. Or, clairement, il n'en est pas ainsi avec $L = \sup\{t < 1 : A_t = 0\}$, où l'on a noté (A_t) l'araignée brownienne, car alors :

$$\mathcal{F}_{L^+} = \mathcal{F}_{L^-} \vee \sigma\{A_1 \in I_i;\ 1 \leq i \leq n\}$$

(les $(I_i)_{i \geq n}$ sont les n raies issues de 0).

14. <u>*Martingales qui s'annulent sur l'ensemble des zéros du mouvement brownien.*</u>

Dans sa filtration propre $(\mathcal{F}_t)$, le mouvement brownien (B_t) possède la propriété de représentation, c'est-à-dire que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale s'écrit comme intégrale stochastique par rapport à (dB_t). Il n'existe donc pas de $(\mathcal{F}_t)$ martingales (M_t), autres que les constantes, telles que $(M_t\, B_t)$ soit une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale.

Par contre, il existe de nombreux processus (Z_t), $(\mathcal{F}_t)$ adaptés, qui ne sont pas nécessairement des semimartingales, tels que $(Z_t\, B_t)$ soit une martingale locale.

En utilisant d'une part les résultats sur la formule de balayage (point **7.**) et, d'autre part, les valeurs principales (point **11.**), nous avons, J. Azéma et moi [132]*, caractérisé tous ces processus (Z_t), et avons finalement donné une représentation de toutes les martingales browniennes qui s'annulent sur les zéros de B.

Références à d'autres auteurs

[A] **S. Watanabe :**

[B] **J. Bertoin :**

[C] **R. Getoor, P. Fitzsimmons :**

[D] **J. Bertoin :**

[B] **T. Shiga, S. Watanabe :**

Livres et Monographies publiés

1. (avec D. Revuz).
Continuous Martingales and Brownian Motion. [134]*
Grundlehren, Springer.
1ère édition : 1991, 2ème édition : 1994, 3ème édition : 1999.
Une version complétée de la troisième édition a été publiée en Avril 2001.

2. **"Zurich I et II"** Lectures in Math., ETH Zürich, Birkhäuser.
Some Aspects of Brownian Motion.
Part I (1992) : Some special functionals. [134]*
Part II (1997) : Some recent martingale problems. [170]*

3. **"Caracas" Local Times and Excursions for Brownian motion : a concise introduction.** Lecciones en Matematicas, Universidad Central de Venezuala (1995). 120 p.

4. **"Madrid" Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian motion.**
Biblioteca de la Revista Math. Ibero Americana (1997).
Recueil d'articles de recherches, dont je suis Editeur.

5. **Exponential Functionals of Brownian Motion and related Processes.**
Springer (2001). 203 p.