[Second document]

9 Février 1994

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. 1)

J. W. Pitman, M. Yor [Ebauche de Note aux CRAS].

Résumé : Si $(R_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 2 ou 3, issu de 0, la variable $\int_0^t \frac{ds}{R_s}$ a même loi que $2 \sup_{s \leq t} |\beta_s|$, resp : $S_t + I_t$,

où β désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, $S_t = \sup_{s \leq t} \beta_s$, et $I_t = \sup_{s \leq t}(-\beta_s)$.

Dans cette Note, on explicite en particulier la loi du couple $\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s}, R_t\right)$, lorsque R est un processus de Bessel, issu de 0, et de dimension $\delta > 0$ quelconque.

1. Du processus au pont de Bessel, en passant par les méandres.

Il existe une famille, indexée par deux paramètres (m, d), de processus $(\rho_{m,d}(t), t \leq 1)$, qui permet de passer continûment du processus de Bessel $(R_\delta(t), t \leq 1)$ au pont de Bessel $(r_\delta(t), t \leq 1)$, et qui contient les méandres.

De façon précise, définissons : $\rho_{m,d}(t) = \left(r_m^2(t) + R_d^2(t)\right)^{1/2}$, où

r_m, et R_d désignent respectivement le pont de Bessel de dimension m, et le processus de Bessel de dimension d, issu de 0. On note $M^{m,d}$ la loi de $\rho_{m,d}$, définie sur l'espace canonique $\left(C([0,1]; \mathbb{R}_+), \mathcal{F} = \sigma(X_s, s \leq 1)\right)$, avec $X_s(\omega) = \omega(s)$.

Rappelons le résultat d'absolue continuité suivant.

Théorème 0 ([ ], Chapitre 3) : Si P^δ désigne la loi de R_δ, on a, pour tous $m, d > 0$:

$$M^{m,d} = \frac{c_{m,d}}{X_1^{m}} \cdot P^{m+d}$$

avec $c_{m,d} = M^{m,d}\left(X_1^m\right) = E^d\left(X_1^m\right) = \dfrac{2^{m/2}\,\Gamma\left(\frac{m+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$.

2. Sur la fonction et les variables gamma.

(2.1) Pour les applications que nous avons en vue, il est intéressant de dégager les relations algébriques élémentaires suivantes.

i) Soit $u \in]0,1[$; on note : $v = 2u-1$. On a alors :

$$\frac{u}{1-u} = \frac{1+v}{1-v}.$$

ii) Notons $\tilde{k} = \log\left(\frac{u}{1-u}\right) = \log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$. On a alors : $v = \operatorname{th}\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right)$.

De plus, si l'on note : $k = |\tilde{k}| \equiv \log\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)$, on a : $|v| = \operatorname{th}\left(\frac{k}{2}\right)$.

iii) A tout couple $(z, z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on associe le couple $(\tilde{k}, \tilde{r})$ défini par :

$$\boxed{(\tilde{k}, \tilde{r}) \equiv \varphi(z, z') = (\log z - \log z' \ ; \ z - z').}$$

Inversement, si le couple $(\tilde{k}, \tilde{r})$ de réels de même signe est donné, il existe un unique couple de réels positifs (z, z') tels que :

$$(\tilde{k}, \tilde{r}) = \varphi(z, z').$$

Ce couple (z, z') est donné par :

$$z = \frac{1}{2}\left(\coth\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right)+1\right)\tilde{r} = \frac{\tilde{r}}{1-e^{-\tilde{k}}} \quad ; \quad z' = \frac{1}{2}\left(\coth\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right)-1\right)\tilde{r} = \frac{\tilde{r}}{e^{\tilde{k}}-1}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{(1-e^{-\tilde{k}})}\,\tilde{r} \quad ; \quad z' = \frac{1}{(e^{\tilde{k}}-1)}\,\tilde{r}}$$

(2.2) Dans la suite, Z_a $(a>0)$ désigne une variable gamma de paramètre a, et $Z_{a,b}$ $(a>0, b>0)$ une variable beta de paramètres (a,b).

Rappelons que, si Z_a et Z'_b sont deux variables gamma indépendantes, de paramètres respectifs a et b, alors la variable $\overline{Z} = Z_a + Z'_b$ est une variable gamma de paramètres $(a+b)$, et $U_{a,b} = Z_a / \overline{Z}$ est une variable beta de paramètres (a,b), indépendante de $\overline{Z}$.

On déduit alors des calculs élémentaires ci-dessus les identités :

$$
\begin{aligned}
(\tilde{K}_{a,b}, \tilde{R}_{a,b}) &\overset{\text{def}}{=} \left(\log(Z_a) - \log(Z'_b) ; Z_a - Z'_b \right) \\
&= \left(\log\left(\frac{U_{a,b}}{1-U_{a,b}} \right) ; (2U_{a,b}-1)\overline{Z} \right) \\
&= \left(\tilde{K}_{a,b} ; \operatorname{th}\left(\frac{\tilde{K}_{a,b}}{2} \right) \overline{Z} \right),
\end{aligned}
$$

et les variables $\tilde{K}_{a,b}$ et $\overline{Z}$ sont indépendantes.

(2.3) Dans les applications ci-dessous (au paragraphe 3), nous nous intéressons surtout au cas $a=b$; posons $U_{(a)} \overset{\text{def}}{=} U_{a,a}$; plus généralement, pour $m<2$, nous considérons les variables aléatoires $U_{(a)}^{(m)}$, dont la loi est caractérisée par :

$$
\text{pour } f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ borélienne}, \quad E\left[f\left(U_{(a)}^{(m)}\right) \right] = c_{(a)}^{(m)} E\left[f(U_{(a)}) \frac{1}{|2U_{(a)}-1|^{m-1}} \right]
$$

(pour $m=1$, on a tout simplement : $U_{(a)}^{(1)} \overset{(\text{loi})}{=} U_{(a)}$).

3. Résultats principaux.

(3.1) Bien que cela puisse paraître étonnant au premier abord, les résultats les plus remarquables, et les plus simples à décrire, le sont pour les processus $\rho_{1,d}$.
En effet, on a le

Théorème 1 : Soit $d > 0$, et N une variable gaussienne, centrée, réduite indépendante du processus $(X_t = \rho_{1,d}(t), t \leq 1)$.

Alors, la loi de : $N\left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}, X_1\right)$, sous $M^{1,d}$ est celle de :

$$\left(\log(Z_{d/2}) - \log(Z'_{d/2})\,;\, Z_{d/2} - Z'_{d/2}\right),$$

où $Z_{d/2}$ et $Z'_{d/2}$ désignent deux variables gamma, de paramètre $\left(\frac{d}{2}\right)$, indépendantes.

(3.2) On s'intéresse maintenant, plus généralement, à la description de la loi de $\left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}, X_1\right)$, lorsque $\left(X_t \equiv \rho_{m,d}(t), t \leq 1\right)$.

<u>Théorème 2</u> : Soit $d > 0$, et $0 < m < 2$; soit également N_m une variable symétrique, indépendante du processus $\left(X_t = \rho_{m,d}(t), t \leq 1\right)$, et telle que

$$|N_m| \overset{(\text{loi})}{=} \left(2 Z_{1-\frac{m}{2}}\right)^{1/2}.$$

Alors, la loi de $N_m \left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}, X_1\right)$ sous $M^{m,d}$ est celle de :

$$\left(\log(Z_\alpha^{(m)}) - \log(Z_\alpha^{\prime(m)}),\ Z_\alpha^{(m)} - Z_\alpha^{\prime(m)}\right)$$

où $\alpha = \frac{d}{2}$, et les variables $Z_\alpha^{(m)}$ et $Z_\alpha^{\prime(m)}$ sont définies à l'aide d'un couple de variables indépendantes $\left(U_\alpha^{(m)}, \overline{Z}_d\right)$, de la façon suivante :

$$Z_\alpha^{(m)} = U_\alpha^{(m)} \overline{Z}_d \quad ; \quad Z_\alpha^{\prime(m)} = (1 - U_\alpha^{(m)}) \overline{Z}_d ,$$

$\overline{Z}_d$ désignant une variable gamma de paramètre d.