Quelques Compléments aux "Aspects multiplicatifs". 11 Juillet 19

1) a) Nous avons montré que, si (Y_t) est une sous-martingale qui satisfait les hypothèses du Théorème 1, alors :

$$\tilde{M}_t = (1+Y_t)\exp(-\ell_t)$$

est une martingale locale.

On peut se demander quel est le rôle précis de la fonction exponentielle dans ce résultat ; par exemple, existe-t-il d'autres couples de fonctions h, k régulières, pour simplifier, telles que :

$$h(\ell_t) + Y_t\, k(\ell_t) \qquad \text{soit une martingale locale.}$$

Or, on a, à l'aide de la formule d'Itô, ou du balayage :

$$h(\ell_t) + Y_t\, k(\ell_t) = h(\ell_t) + \int_0^t k(\ell_s)\, dY_s\,,$$

ce qui implique que, pour que $\left(h(\ell_t) + Y_t\, k(\ell_t),\ t \geq 0\right)$ soit une martingale locale, il est nécessaire et suffisant que :

$$h(\ell) = c - \int_0^\ell dx\, k(x)\,,$$

tout au moins pour les valeurs de ℓ "visitées" par $(\ell_t, t \geq 0)$ (mais, souvent, $\ell_\infty = \infty$ ....

En conséquence, si l'on pose : $h(\ell) = -K(\ell)$,

on a :

$$K(\ell_t) - K'(\ell_t)\, Y_t \qquad \text{martingale locale.}$$

b) Supposons maintenant $K(0) = 1$, $K \downarrow$, et posons :

$$(1) \qquad K(\ell_t) - K'(\ell_t)\, Y_t = M_t\,, \quad \text{et } I_t = \inf_{s \leq t} M_s\,;$$

On obtient alors : $I_t = K(\ell_t)$,

et si l'on récrit (1) en termes de I et M, il vient :

$$Y_t = -\frac{1}{(K' \circ K^{-1})(I_t)} (M_t - I_t).$$

Ainsi, si l'on donne une fonction f localement lipschitzienne, positive, et que l'on résoud :

$$-K'(\ell) = f(K(\ell)) \quad ,$$

on vient de montrer :

$$\boxed{Y_t = \cancel{\frac{1}{f(\ell_t)}} \frac{1}{f(I_t)} (M_t - I_t)}$$

avec

$$M_t = K(\ell_t) - K'(\ell_t) Y_t .$$