Sept questions ouvertes sur les filtrations en temps continu, et en particulier les filtrations browniennes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Une *filtration* $\mathcal{F}$ est une famille continue à droite $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, chaque $\mathcal{F}_t$ contenant tous les événements négligeables (la continuité à droite signifie que $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$).

Tous les mouvements browniens sont issus de l'origine. Une filtration est *fortement brownienne* si elle est engendrée par un mouvement brownien. Elle est *faiblement brownienne* si elle jouit de la propriété de représentation prévisible (PRP) par rapport à un mouvement brownien. On peut préciser *de dimension d* lorsque le mouvement brownien qui l'engendre ou par rapport auquel elle a la PRP est de dimension d. (La dimension ne dépend pas du choix de ce brownien.)

Une filtration $\mathcal{F}$ est *immergée* dans une filtration $\mathcal{G}$ (et l'on écrit $\mathcal{F} \overset{\mathrm{m}}{\subset} \mathcal{G}$) si toute martingale pour $\mathcal{F}$ est une martingale pour $\mathcal{G}$ (c'est équivalent à demander que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ pour tout t et que $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_s$ soient conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_s$ pour $s \leqslant t$).

Q1. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et X et H deux processus sur Ω, X étant continu et H borné. Pour chacune des deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, on suppose que X est une semimartingale et que H est prévisible. A-t-on l'égalité

$$\int H \, \mathrm{d}X = \int H \, \mathrm{d}X \,,$$

où l'intégrale stochastique de gauche est calculée dans la filtration $\mathcal{F}$ et celle de droite dans $\mathcal{G}$?

Références : [12], [17]

Q2. On suppose que $\mathcal{F} \overset{\mathrm{m}}{\subset} \mathcal{G} \overset{\mathrm{m}}{\subset} \mathcal{H}$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont fortement browniennes, de même dimension d. Est-ce que $\mathcal{G}$ l'est aussi?

Référence : [8]

Q3. Plus généralement, toute filtration faiblement brownienne immergée dans une filtration fortement brownienne est-elle fortement brownienne?

Références : [1], [3], [6], [7], [9], [10], [14], [15]

Q4. Soit B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il une forme bilinéaire $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que la martingale réelle

$$\int_0^t f(B_s, \mathrm{d}B_s)$$

ne soit pas fortement brownienne?

Références : [2], [11], [16]

Q5. Soit B un mouvement brownien réel dans la filtration $\mathcal{F}$ engendrée par un mouvement brownien plan. Existe-t-il dans $\mathcal{F}$ un mouvement brownien réel maximal dont la filtration contienne celle de B? (*Maximal* signifie qu'aucun autre mouvement brownien réel pour $\mathcal{F}$ n'engendre une filtration — ou une tribu, c'est équivalent — strictement plus grosse.)

Références : [4], [5]