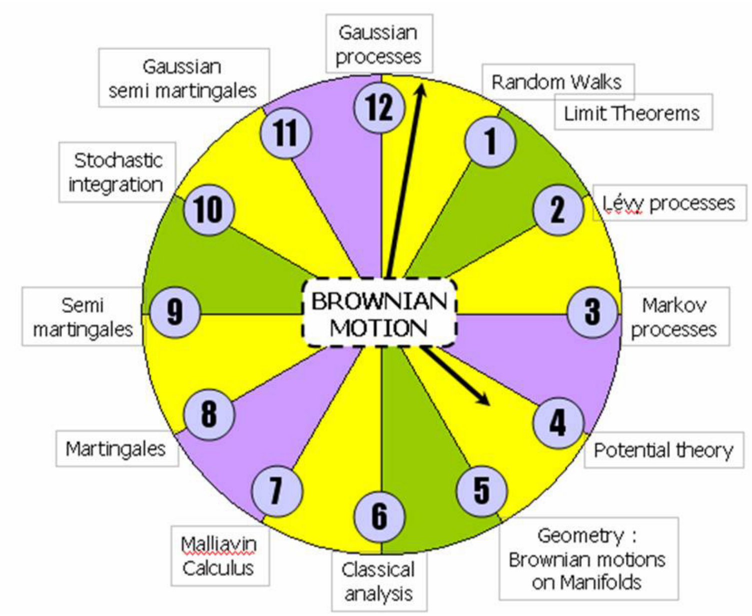
Du mouvement brownien aux processus de Lévy, via les semi-martingales et les diffusions

M.Yor[(1),(2)]

27 février 2010

[(1)] Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires,
Universités Paris VI et VII, 4 Place Jussieu - Case 188,
F-75252 Paris Cedex 05 (1981-2014)

[(2)] Institut Universitaire de France (2004-2014)



Le mouvement brownien est à l'intersection de nombreuses sous-disciplines probabilistes.

Table des matières

Préface

Je souhaite donner quelques explications concernant la manière dont le texte qui suit est rédigé, laquelle est un peu inhabituelle en Mathématique.
Cette rédaction a été motivée, à l'origine, par deux suggestions amicales provenant d'une part, de Jean-Pierre Kahane, qui me demandait une sorte de "Notice des travaux" à la fois dépouillée et accessible aux non-spécialistes et, d'autre part, de M. Vigon, qui venait de terminer sa thèse et souhaitait apprendre un certain nombre de résultats portant sur le mouvement brownien, les martingales, etc..., de façon aussi directe que possible à partir des auteurs de ces résultats.
Cette seconde demande m'a fait réfléchir sur le point suivant : un article mathématique une fois rédigé, avec tous les détails et subtilités des preuves, au fil de la litanie des lemmes, propositions et théorèmes, cache souvent (à l'insu de son auteur, convaincu de la "limpidité" de son texte !) le point crucial de l'argument et/ou la motivation première qui ont amenés à la gestation de cet article.
Le texte qui suit essaie de répondre à cette double demande, et aux exigences associées, en présentant un peu plus d'une vingtaine de thèmes de recherche qui m'ont occupé depuis environ 1976, et qui semblent conserver un certain intérêt parmi la communauté probabiliste, et se développer dans des contextes plus généraux, par exemple : passage d'une étude brownienne à une étude dans le cadre des processus de Lévy.
Pour la rédaction de chaque thème, j'ai adopté la présentation suivante, en trois temps :

a) Motivation ;
b) Enoncés de quelques théorèmes avec commentaires ;
c) Développements du thème.

Il me semble intéressantt important, si l'on veut bien comprendre ce qui suit, de signaler qu'un fil conducteur général m'a guidé tout au long de ces recherches, centrées principalement sur le mouvement brownien, à valeurs réelles, ou complexes (pour simplifier).
Conformément à ce que j'ai écrit plus haut, les arguments de démonstration sont réduits à leur strict minimum ; ce sont plutôt des indications, voire des pistes...
La lecture de chaque thème peut-être faite indépendamment des autres, mais j'ai souvent également indiqué, dans un thème donné, ses relations éventuelles avec d'autres thèmes.
Chaque thème se termine avec 2 ensembles de références ;
- les Références A qui sont des références générales sur le thème ;
- les Références B qui sont les références des articles que j'ai (souvent co-

)écrits sur ce thème.
Finalement, l'esprit dans lequel j'ai rédigé cet ensemble m'a semblé être assez voisin de celui des "Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui", et il était donc naturel de soumettre cet ouvrage aux éditions Cassini.
Comme tout processus stochastique, le mouvement brownien est, disons, une trajectoire générique $((\omega)t)$ indéxée par $t \in \mathbb{R}_+$, considérée relativement à mesure de probabilité, en l'occurence la mesure de Wiener W sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Cette mesure "induit" sur cette trajectoire générique certaines propriétés particulières, par exemple, le mouvement brownien $(B_t, t \leq T)$ est à variation quadratique finie, a un module de continuité bien particulier, i.e :

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C_{\omega} {}_{\sqrt{|t-s| \log\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}}$$

etc...
En tant que "trajectoire générique", on peut considérer pour $\omega(t) \equiv B_t(\omega)$, $t \leq T$, des quantités remarquables étudiées profondément en analyse, pour les fonctions déterministes, bien sûr, sous certaines conditions d'existence, par exemple :
• si $(Z_t(\omega), t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien plan issu de z_0, il ne passe presque surement pas en $z \neq z_0$, et on peut considérer :

$$\theta_t^z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} Im\left(\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \frac{d\xi}{\xi - z}\right)$$

"le nombre de tours" de $(Z_t(\omega), t \geq 0)$ autour de z ; plus généralement, on peut considérer les intégrales "de lignes" le long de la trajectoire brownienne ;
• si $(B_t(\omega), t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel, les valeurs principales (de Cauchy, ou Hadamard...)

$$I_a(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \frac{ds}{B_s(\omega)a} 1_{(|B_s(\omega) - a| \geq \varepsilon)}$$

ont un sens.
Une fois l'existence de telles quantités établie, il m'a paru très intéressant d'étudier leurs distributions, éventuellement seulement en un sens asynmptotique (i.e : $t \to \infty$). Ce fil conducteur est un peu différent, mais pas sans rapport, avec la recherche de preuves probabilistes de résultats d'analyse (réelle, ou complexe), souvent obtenues en prenant l'espérance de fonctionnelles browniennes remarquables, ou bien, par exemple, en ce qui concerne la géométrie différentielle, en étudiant le mouvement brownien à valeurs dans une variété donnée ; celui-ci va explorer "tous les coins et recoins" de cette variété, et donc donner des renseignements sur la géométrie de cette variété.

Remerciements : Il ne s'agit pas ici de phrases plus ou moins convenues ; de façon tout à fait objective, cet ouvrage n'aurait pas vu le jour sans les apports essentiels, au cours des années, des remarquables chercheurs avec lesquels j'ai eu le privilège de collaborer ; parmi ceux-ci, il me faut bien évidemment citer Jim Pitman, Jacques Azéma, Jean-François Le Gall, Philippe Biane, Jean Bertoin, Martin Barlow, Thierry Jeulin, Hélyette Geman, Michel Emery, Catherine Donati-Martin, Frédérique Petit, Philippe Carmona, Zhan Shi, Yu Hu, Bernard Roynette, Pierre Vallois, et beaucoup d'autres encore !

1 Thème 1. Représentation de martingales comme intégrales stochastiques ; mesures martingales équivalentes

(i) On doit à K. Itô la définition et la construction des intégrales stochastiques :

$$\int_0^\infty H_s dB_s \tag{1.1}$$

où, pour simplifier, nous supposons ici que (B_s) est un mouvement Brownien réel, et (H_s) un processus prévisible pour la filtration naturelle $\mathcal{B}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ de B, tel que :

$$E\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right] < \infty \tag{1.2}$$

En outre, toujours dans ce cadre, Itô a montré que l'on peut représenter toute variable $X \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ comme :

$$X = E(X) + \int_0^\infty x_s dB_s \ ,$$

pour un processus prévisible (x_s), appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, dPds)$. Autrement dit, toute variable centrée, de carré intégrable : $X \in L_0^2(\mathcal{B}_\infty)$ est une intégrale stochastique !

Ceci amène à dire, en utilisant un terme de Mathématiques Financières, que le mouvement Brownien est "complet", au sens où il permet de représenter comme intégrale stochastique par rapport à lui-même toute fonctionnelle de carré intégrable.

(ii) Ensuite, Kunita-Watanabe [1.A.4] [1] ont développé la construction d'in-

1. Voir également le volume A tribute to K.Itô, en préparation pour : Stoch. Proc. Appl. et qui devrait paraître au Printemps 2010.

tégrales stochastiques par rapport à toute martingale localement de carré intégrable, et enfin une définition a été obtenue pour toute martingale locale, le cours de P.A. Meyer (1976) marquant une étape décisive de ces extensions successives.
Il était alors naturel de se demander quelles sont les martingales locales complètes, i.e : les martingales locales M telles que toute variable $X \in L^2(\mathcal{M}_\infty)$ puisse se représenter sous la forme :

$$X = E(X) + \int_0^\infty x_s dM_s \ ,$$

avec (x_s) processus prévisible pour la filtration $\mathcal{M}_s = \sigma\{M_u, u \leq s\}\ ,\ s \geq 0$.
(iii) Ce sont les arguments de Dellacherie [1.A.6] concernant le caractère complet du mouvement brownien (ainsi que du processus de Poisson compensé : $\widetilde{N}_t = N_t - t, t \geq 0$) qui ont amené à la résolution du problème posé en **(ii)**.

Références

[1.A]

[1.A.1] K. Itô. Selected papers. Springer, 1987.

[1.A.2] P.A. Meyer. In Séminaire de Probabilités I (: 4 exposés sur les Intégrales Stochastiques). 1967.

[1.A.3] P.A. Meyer. Un cours sur les Intégrales Stochastiques. Séminaire de Probabilités X. Lect. Notes Maths. 511, Springer, 1976.

[1.A.4] H. Kunita, S. Watanabe. On square integrable martingales. Nagoya Math. J., 1967.

[1.A.5] H. Kunita. Itô's Stochastic Calculus. Its surprising power for applications. Special Volume : A tribute to K. Itô. Stoch. Proc. Appl. (2010).

[1.A.6] C. Dellacherie. xxx. Séminaire de Probabilités. Lect. Notes Maths., Springer, 19XX.

[1.B]

[1.B.1] J. Jacod et M. Yor. Étude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 38(2) :83–125, 1977.

[1.B.2] M. Yor. Sur l'étude des martingales continues extrêmales. Stochastics, 2(3) :191–196, 1979.

[1.B.3] D. W. Stroock et M. Yor. On extremal solutions of martingale problems. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 13(1) :95–164, 1980.

2 Thème 2. Temps locaux de semi-martingales et autres processus

Etant donné un processus aléatoire $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles (pour simplifier la discussion), à quelles quantités peut-on naturellement s'intéresser pour en dégager les propriétés importantes ? Par exemple, ce processus est-il transient, récurrent, etc ? On est aussi à étudier la façon dont ce processus "passe son temps" dans un ensemble Borélien générique,autrement dit, on va étudier la famille de mesures aléatoires, indexée par (t, ω) :

$$\mu_{t,\omega}(dx) \equiv \int_0^t ds 1_{(X_s(\omega) \in dx)}$$

Typiquement, une telle mesure est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (dx) ? ou lui est-elle singulière ? Dans le premier cas, il existe alors une famille de densités $(L_t^x(\omega); x \in \mathbb{R})$ que l'on peut toujours choisir conjointement mesurable en (x, t, ω) telle que $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, Borel, on a :

$$\int_0^t ds f(X_s(\omega)) = \int dx f(x) L_t^x(\omega)$$

Geman-Horowitz [2.A.2] ont présenté différentes méthodes permettant de montrer cette propriété d'absolue continuité. Parmi celles-ci, il y a bien sûr la "méthode Fourier", la plus naturelles pour un analyste : la transformation de Fourier était un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, il suffit de montrer :

$$\int d\xi E[|\widehat{\mu}_{t,\omega}(\xi)|^2] < \infty$$

Références

[2.A]

[2.A.1] J. Azéma, M. Yor (eds). Temps locaux. Astérisque, 1978.

[2.A.2] D. Geman, J. Horowitz. Occupation densities. Ann. Prob., 1980.

[2.B]

[2.B.1] M. Yor. Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. In : Temps locaux. Astérisque, 52-53 :23–26, 1979.

[2.B.2] M. Yor. Sur un processus associé aux temps locaux browniens. Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II Math., (20) :140–148, 1982.

[2.3] B. Rajeev et M. Yor. Local times and almost sure convergence of semi-martingales. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 31(4) :653–667, 1995.

[2.4] M. Gradinaru, B. Roynette, P. Vallois et M. Yor. Abel transform and integrals of Bessel local times. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 35(4) :531–572, 1999.

3 Thème 3. Inégalités dans L^p entre fonctionnelles de semi-martingales

(3.a) A l'origine des développements de ce thème, on peut placer le problème suivant : soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel (pour simplifier), et T un temps d'arrêt pour ce mouvement brownien. Le processus $(B_{t\wedge T}, t \geq 0)$ est-il uniformément intégrable ? Si oui, on a donc (théorème d'arrêt de Doob) : $E(B_T) = 0$, égalité qui peut être importante pour de nombreuses raisons. Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy assurent qu'il existe deux constantes universelles $0 < c < C < \infty$ telles que :

$$cE(\sqrt{T}) \leq E[\sup_{t\leq T} |B_t|] \leq CE[\sqrt{T}] \tag{3.1}$$

Ainsi, $E[\sqrt{T}] < \infty$ implique que : $\sup_{t\leq T} |B_t|$ est intégrable, et, a fortiori, $(B_{t\wedge T})$ est uniformément intégrable.

(3.b) Cette double inégalité s'étend, grâce au théorème de Dubins-Schwarz, et Dambis : toute martingale locale continue $(M_t, t \geq 0)$ peut être représentée comme :

$$M_t = \beta_{<M>_t}, t \geq 0$$

où $(\beta_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien pour une certaine filtration $(\mathcal{G}_u)u > 0$ par rapport à laquelle les temps $(< M >_t, t \geq 0)$ sont des temps d'arrêt. En conséquence, et en utilisant (3.1) on obtient que pour toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale continue (M_t) et toute $(\mathcal{F}_t)$, temps d'arrêt, la double inégalité

$$cE[(< M >_T)^{1/2}] \leq E[\sup_{t\leq T} |M_t|] \leq \mathcal{C}E[(< M >_T)]$$

a lieu où les constantes c et $\mathcal{C}$ sont celles qui interviennent en (3.1).

Références

[3.A]

[3.A.1] D. Burkholder. xxx xxx

[3.A.2] D. Burkholder, Gundy, Davis. xxx xxx

[3.A.3] E. Lenglart, D. Lépingle, M. Pratelli. xxx. Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Math., Springer, 19XX.

[3.B]

[3.B.1] M. Yor. Les inégalités de sous-martingales, comme conséquences de la relation de domination. Stochastics, 3(1) :1–15, 1979.

[3.B.2] M. T. Barlow et M. Yor. (Semi-) martingale inequalities and local times. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 55(3) :237–254, 1981.

[3.B.3] M. T. Barlow et M. Yor. Semimartingale inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey lemma, and applications to local times. J. Funct. Anal., 49(2) :198–229, 1982.

[3.B.4] M. Yor. Une inégalité optimale pour le mouvement brownien arrêté à un temps quelconque. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 296(9) :407–409, 1983.

[3.B.5] J.-M. Bismut et M. Yor. An inequality for processes which satisfy Kolmogorov's continuity criterion. Application to continuous martingales. J. Funct. Anal., 51(2) :166–173, 1983.

[3.B.6] S. Song et M. Yor. Inégalités pour les processus self-similaires arrêtés à un temps quelconque. In Séminaire de Probabilités, XXI, volume 1247 of Lecture Notes in Math., pages 230–245. Springer, Berlin, 1987.

[3.B.7] S. D. Jacka et M. Yor. Inequalities for nonmoderate functions of a pair of stochastic processes. Proc. London Math. Soc. (3), 67(3) :649–672, 1993.

4 Thème 4. Grossissements de filtrations : grossissements initiaux et progressifs

(4.a) La notion de martingale est relative... De façon précise, lorsque l'on dit que le processus $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale, on sous-entend : par rapport à un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ pour lequel :

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \qquad (s \leq t)\,,$$

et (M_t) est $(\mathcal{F}_t)$ adapté.
Lorsque l'on ne précise pas la filtration $(\mathcal{F}_t)$, on peut penser raisonnablement que c'est la filtration naturelle de (M_t) qui est en jeu, i.e :

$$\mathcal{M}_t = \sigma\{M_s, s \leq t\}\,.$$

Remarquons que, si $(\mathcal{J}_t)$ est n'importe quelle filtration intermédiaire entre $(\mathcal{M}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$, alors la $(\mathcal{F}_t)$ martingale (M_t) est une $(\mathcal{J}_t)$ martingale. Il n'en est pas de même lorsque l'on remplace $(\mathcal{J}_t)$ par une surfiltration $(\mathcal{S}_t)$ de $(\mathcal{F}_t)$. En fait, il est assez rare que (M_t) soit encore une $(\mathcal{S}_t)$ martingale.
Dans la suite, plutôt que de considérer ces questions de façon individuelle, nous allons les étudier pour toutes les $(\mathcal{F}_t)$ martingales à la fois.
Soit donc, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, deux filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ telles que, pour tout t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{S}_t \subset \mathcal{F}$.
Essayons de répondre aux questions suivantes :
Question 1 : A quelle condition est-ce que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est une $(\mathcal{S}_t)$ martingale ? On dit alors que $(\mathcal{F}_t)$ est immergée dans $(\mathcal{S}_t)$.
La réponse à cette question, donnée par le Théorème 4.1, est assez "rigide" et amène à se poser une seconde question, un peu plus "souple".
Question 2 : A quelle condition est-ce que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est une $(\mathcal{S}_t)$ semimartingale ? On dit alors que $(\mathcal{F}_t)$ est semi-immergée dans $(\mathcal{S}_t)$.
On peut estimer que, s'il en est ainsi, c'est que la "surinformation" apportée par $(\mathcal{S}_t)$ au-dessus de $(\mathcal{F}_t)$ est "raisonnable".
La question est donc, une filtration $(\mathcal{F}_t)$ étant donnée, de déterminer les "surinformations raisonnables" au-dessus de $(\mathcal{F}_t)$.
De façon un peu étonnante, il n'y a pas eu d'étude vraiment générale de ce problème, souvent appelé : problème de grossissement de filtration. Toutefois, deux cas ont été étudiés de façon très systématique :
- celui du grossissement initial de $(\mathcal{F}_t)$, à l'aide d'une variable aléatoire X ; c'est-à-dire que : $\mathcal{S}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(X)$;
- celui du grossissement progressif de $(\mathcal{F}_t)$, consistant à faire d'une variable aléatoire $\tau \geq 0$ (: un temps aléatoire) un temps d'arrêt ; ainsi, si $\mathcal{S}_t^\tau = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \leq s; s \leq t)$, est-ce que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale reste une semimartingale ? Le Théorème 4.3 (plus bas) répond partiellement à cette question.

Théorème 4.1. *Toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est une $(\mathcal{S}_t)$ martingale, si, et seulement si, pour tout t fixé, $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{S}_t$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{F}_t$.*

Corollaire 4.2. *Si pour tout, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{S}_t \subset \mathcal{F}_\infty$, et si $(\mathcal{F}_t)$ est immergée dans $(\mathcal{S}_t)$, alors la filtration $(\mathcal{S}_t)$ est identique à $(\mathcal{F}_t)$.*

Démonstration : D'après le théorème 4.1, s'il y a immersion, on doit donc ainsi : $\forall F_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, $E[1_{F_\infty}|\mathcal{S}_t]$, $E[1''_{F_\infty}|\mathcal{F}_t]$. Ceci s'applique en particulier à tout ensemble $S_t \in \mathcal{S}_t$, donc : $1_{S_\infty} = E[1_{S_\infty}|\mathcal{F}_t]$ est $(\mathcal{F}_t)$ mesurable.

Ainsi, sous la seule hypothèse : $\mathcal{F}_t \subsetneq \mathcal{S}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty$, il existe au moins une $(\mathcal{F}_t)$ martingale qui n'est pas une $\mathcal{S}_t$ martingale, et la question 2 apparaît donc très naturelle.

(4.b) Faisons quelques préparations pour énoncer le théorème 4.3 : on suppose que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est continue (: hypothèse (C)), et, d'autre part, que τ est la fin d'un ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, c'est-à-dire :

$$\tau = \sup\{t : (t, \omega) \in \Gamma\} ,$$

où Γ est un ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.
J. Azéma a associé à τ la surmartingale :

$$Z_t = P(\tau > t|\mathcal{F}_t))$$

On suppose que pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T on a : $P(\tau = T) = 0$.
On note (A) cette hypothèse.
On a alors le :

Théorème 4.3. *Sous les hypothèses (C) et (A), toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale (M_t) est une $(\mathcal{S}_t^\tau)$ semimartingale, dont la décomposition canonique est :*

$$M_t = \widetilde{M_t} + \int_0^{\tau\wedge t} \frac{d < M, Z >_s}{Z_s} + \int_\tau^t \frac{d < M, 1 - Z >_s}{1 - Z_s}$$

où $(\widetilde{M_t})$ est une $(\mathcal{S}_t^\tau)$ martingale locale.

(4.c) Commentaires : Voici quelques illustrations des Théorèmes 4.1 et 4.3.

(4.c.1) A propos du Théorème 4.1.

• Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel, et $B_t^{(n)} = (B_t, \beta_t^{(2)}, ..., \beta_t^{(n)})$ un mouvement brownien n-dimensionnel, dont la première composante est (B_t) , alors toute $(\mathcal{B}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}, t \geq 0)$ martingale est une $(\mathcal{B}_t^{(n)})$ martingale.
Cela découle aisément de ce que : $\mathcal{B}_t^{(n)} = \mathcal{B}_t \vee \mathcal{C}_t$, où $\mathcal{C}_t = \sigma\{\beta_s^{(2)}, ..., \beta_s^{(n)}; s \leq t\}$, est indépendante de $\mathcal{B}_t$.
• Voici quelques exemples un peu moins évidents

(i) $(B_t, t \geq 0)$ désignant toujours un mouvement brownien unidimensionnel, soit $\beta_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s) dB_s, t \geq 0$. Alors, la filtration naturelle de β, soit $(\widetilde{\mathcal{B}}_t)$, est celle de la valeur absolue de B, ce qui découle assez facilement de la formule de Tanaka :

$$|B_t| = \beta_t + L_t\ , \ t \geq 0\ , \ \text{(cf. Thème 2)}$$

Toute $(\widetilde{\mathcal{B}}_t)$ martingale étant une intégrale stochastique par rapport à $(d\beta_s)$, est une $(\mathcal{B}_t)$ martingale,

(ii) Pour $n > 1$, notons $R_t = |B_t^{(n)}|$ (le processus de Bessel de dimension n, dont il sera question dans le Thème 5). Sa filtration naturelle $(\mathcal{R}_t)$ est celle du mouvement brownien $(\beta_t^{(n)})$ tel que :

$$\mathcal{R}_t = \beta_t^{(n)} + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s} \tag{4.1}$$

On a, de plus :

$$\beta_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_s^{(i)} dB_s^{(i)}}{R_s} \tag{4.2}$$

Un argument semblable à celui utilisé en (i) montre que toute $(\mathcal{R}_t)$ martingale est une $(\mathcal{B}_t^{(n)})$ martingale.

• Voici enfin un résultat "négatif" qui peut sembler un peu troublant compte tenu des paragraphes (i) et (ii) ci-dessus.

Proposition 4.4. *Soit (B_t) mouvement brownien unidimensionnel. Il n'existe pas de surfiltration $(\mathcal{S}_t)$ de $(\mathcal{B}_t)$ telle que : $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{S}_t \subset \mathcal{B}_\infty$, pour laquelle (B_t) soit une $(\mathcal{S}_t)$ martingale.*

Première démonstration : Il suffit d'appliquer le Corollaire 4.2, car si (B_t) est une $(\mathcal{S}_t)$ martingale, alors toute $(\mathcal{B}_t)$ martingale (qui est une intégrale stochastique par rapport à (dB_t)) est une $(\mathcal{S}_t)$ martingale.

Démonstration : (elle reprend, plus doucement !, les arguments de la première démonstration) Soit donc $(\mathcal{S}_t)$ surfiltration de $(\mathcal{B}_t)$ satisfaisant les conditions de l'énoncé.
Fixons $t_o > 0$, et considérons $\Gamma_{t_o} \in \mathcal{S}_{t_o}$.
Par hypothèse, on a :

$$E[1_{\Gamma_{t_o}}(B_t - B_{t_o})] = 0\ , \ \text{pour tout } t \geq t_o\ ,$$

ce qui implique plus généralement que pour tout processus (H_u), $(\mathcal{B}_u)$ prévisible, tel que :

$$E[\int_{t_o}^{\infty} H_u^2 du] < \infty \ ,$$

on ait :

$$E[1_{\Gamma_{t_o}} \int_{t_o}^{\infty} H_u dB_u] = 0 \ . \tag{4.3}$$

Or, d'après la propriété de représentation prévisible pour le mouvement brownien (B_t) (dans sa propre filtration $(\mathcal{B}_t)$), on a, en utilisant l'hypothèse que : $\Gamma_{t_o} \in \mathcal{B}_\infty$:

$$1_{\Gamma_{t_o}} = E[1_{\Gamma_{t_o}} | \mathcal{B}_{t_o}] + \int_{t_o}^{\infty} \gamma_u dB_u \ , \tag{4.4}$$

pour un certain processus $(\mathcal{B}_u)$ prévisible (γ_u) tel que $E[\int_{t_o}^{\infty} \gamma_u^2 du] < \infty$. Prenant $H = \gamma$ en (4.3), on obtient : $\int_{t_o}^{\infty} \gamma_u dB_u = 0$, donc d'après (4.4),

$$1_{\Gamma_{t_o}} = E[1_{\Gamma_{t_o}} | \mathcal{B}_{t_o}] \ .$$

En conséquence, $(\mathcal{S}_t)$ est identiquement égale à $(\mathcal{B}_t)$.

$\square$

Remarques : a) La Proposition 4.4 ne contredit pas les exemples de surfiltrations présentés en (i) et (ii) ci-dessus, car dans ces deux cas :

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\infty \subsetneq \mathcal{B}_\infty \text{ et } \mathcal{R}_\infty \subsetneq \mathcal{B}_\infty^{(n)}$$

b) Voici maintenant un exemple de situation très différente de celle de la Proposition 4.4 :
considérons : $A_t = \int_0^t (X_s dY_s - Y_s dX_s)$, $t \geq 0$, le processus de l'aire stochastique (de Lévy) du mouvement brownien plan $(X_t + iY_t, t \geq 0)$. Notons $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du processus $(A_t)_{t\geq 0}$. C'est la filtration d'un mouvement brownien 2-dimensionnel :

$$\left(\gamma_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{R_s} \ , \ \beta_t = R_t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s}; t \geq 0\right)$$

où $R_t = (X_t^2 + Y_t^2)^{1/2}$, et il n'est pas difficile de montrer que (A_t) est encore une martingale dans la surfiltration $(\widetilde{\mathcal{A}}_t)$ de $(\mathcal{A}_t)$, définie par : $\widetilde{\mathcal{A}}_t = \mathcal{A}_t \vee \sigma\{\beta_s; s \geq 0\}$, et on a bien :

$$\mathcal{A}_t \subset \widetilde{\mathcal{A}}_t \subset \mathcal{A}_\infty.$$

(4.c.2) A propos du Théorème 4.3
Un certain nombre d'exemples de fins d'ensembles $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles τ, satisfaisant les hypothèses (C) et (A), ont été présentés dans la Monographie : Mansuy-Yor [4.B.7]. Le thème 21, est une illustration à la fois simple et puissante de l'intérêt de ces fins d'ensemble prévisibles. Dans ce thème 21, $\tau = \mathcal{G}_K = \sup\{t \geq 0 : M_t = K\}$ où $(M_t, t \geq 0)$ désigne une martingale locale continue, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et tendant vers 0 lorsque $t \to \infty$.
On a alors :

$$Z_t \stackrel{\text{def}}{=} P(\mathcal{G}_K \geq t | \mathcal{F}_t) = 1 \wedge \left(\frac{M_t}{K} \right)$$

Références

[4.A]

[4.A.1] K. Itô. Extension of stochastic integrals. In Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976), pages 95–109, Wiley 1978.

[4.A.2] M. Barlow Study of a filtration expanded to include an honest time. Z. Wahrsch. Verw., 44(4), pages 307–323, 1978.

[4.B]

[4.B.1] M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux. In Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977), volume 649 of Lecture Notes in Math., pages 61–69. Springer, Berlin, 1978.

[4.B.2] T. Jeulin et M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites. In Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977), volume 649 of Lecture Notes in Math., pages 78–97. Springer, Berlin, 1978.

[4.B.3] T. Jeulin et M. Yor. Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 11(3) :429–443, 1978.

[4.B.4] M. Yor. Grossissement de filtrations et absolue continuité de noyaux. In Grossissement de filtrations : exemples et applications, volume 1118 of Lecture Notes in Math., page 6. Springer, Berlin, 1985.

[4.B.5] M. Yor. Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque. 1 : Théorèmes généraux, 2 : Le rôle de certains espaces

BMO. In Grossissement de filtrations : exemples et applications, volume 1118 of Lecture Notes in Math., pages 11–14. Springer, Berlin, 1985.

[4.B.6] M. Yor. Entropie d'une partition, et grossissement initial d'une filtration. In Grossissement de filtrations : exemples et applications, volume 1118 of Lecture Notes in Math., page 45. Springer, Berlin, 1985.

[4.B.7] R. Mansuy et M. Yor. Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting. Lecture Notes in Math. 1873, Springer, 2006.

5 Thème 5. Quelques propriétés des processus de Bessel

(5.a) On appelle processus de Bessel de dimension $\delta \geq 0$, issu de $r \geq 0$, une diffusion $(R_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, solution de l'équation stochastique :

$$R_t^2 = r^2 + 2\int_0^t R_s d\beta_s + \delta t\,,\ t \geq 0 \tag{5.1}$$

où $(\beta_s, s \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel.
(5.b) Comment parvient-on naturellement à cette équation (5.1) ?
Si $\delta = n$ est entier, le processus : $R_t = |B_t^{(n)}|\,,\ t \geq 0$, où $B_t^{(n)}$ est un mouvement brownien n-dimensionnel, satisfait bien (5.1), grâce à une application particulièrement simple de la formule d'Itô à R_t^2, et on prend :

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n B_{i,s}^{(n)} dB_{i,s}^{(n)}}{R_s}$$

avec $(B_i^{(n)}; i = 1, 2, ..., n)$ les n composantes de $B^{(n)}$.
Il est alors assez naturel de poser l'équation (5.1) en toute généralité ; les travaux de l'école japonaise dans les années 70 ont montré que cette équation, jouit des propriétés d'existence et d'unité trajectorielles. Puis, dans sa thèse de 3ème cycle, J.F. Le Gall a montré, à l'aide d'arguments de temps locaux que l'équation stochastique :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) dB_s\,,\ t \geq 0\,, \tag{5.2}$$

où $(\sigma(x), x \in \mathbb{R})$ est Hölderienne d'ordre $1/2$, et $(b(x), x \geq 0)$ lipschitzienne, jouent des propriétés d'existence et d'unité trajectorielles, courcicuitant ainsi les approximations longues et délicates de l'Ecole japonaise ; voir,

par exemple, Ikeda-Watanabe [5.A.4].
Si l'on note $Q^{(\delta)}_{r^2}$ la loi sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ du processus solution de (5.1), la propriété d'additivité :

$$Q^{(\delta)}_{r^2} * Q^{(\delta')}_{(r')^2} = Q^{(\delta+\delta')}_{r^2+(r')^2} \qquad (a)$$

est satisfaite.
(5.c) Revenons aux Carrés de processus de Bessel. En conséquence de (a), la démonstration de la formule :

$$Q^{(\delta)}_{r^2}(\exp(-\lambda X_t)) = \frac{1}{(1+2\lambda t)^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{\lambda r^2}{1+2\lambda t}\right) \tag{5.3}$$

peut être ramenée à la dimension $\delta = 1$, pour laquelle X_t est le carré du mouvement brownien réel, et (5.3) est obtenue très aisément.
Il n'est pas très difficile d'inverser la transformée de Laplace (5.3), et l'on obtient ainsi une expression explicite du semi-groupe $Q^{(\delta)}_t(x; dy) = q^\delta_t(x, y)dy$ du carré du processus de Bessel, à savoir :

$$q^\delta_t(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{(x+y)}{2t}\right) I_\nu(\sqrt{xy}/t)\,,\ t > 0, x > 0 \tag{5.4}$$

Attention : dans le cas $\delta = 0$,c'est-à-dire $\nu = -1$, et alors : $I_1 = I_{-1}$, il faut ajouter à cette mesure absolument continue, la partie Dirac :

$$\exp\left(-\frac{x}{2t}\right)\varepsilon_o(dy)$$

C'est la présence de la fonction de Bessel I_ν figurant en (5.4) qui justifie l'appellation "processus de Bessel".
(5.d) Les processus de Bessel de toute dimension δ interviennent encore plus naturellement dans le paysage du mouvement brownien réel (auquel on ajoutera un drift constant) via la <u>représentation de Lamperti</u>, dont la version générale, dans le cadre des processus de Lévy, sera discutée dans le Thème 20.
Pour l'instant, le cas particulier de cette représentation qui nous intéresse ici s'énonce ainsi : si $B^{(\nu)}_t \equiv B_t + \nu t$, désigne le mouvement brownien avec dérive $\nu (\in \mathbb{R})$, on peut encore écrire :

$$\exp(B^{(\nu)}_t) = R^{(\nu)}_{A^{(\nu)}_t}\,,\ t \geq 0 \tag{5.5}$$

où $(R^{(\nu)}_u)$ désigne un processus de Bessel de dimension $\delta = 2(\nu+1)$ et $A^{(\nu)}_t = \int_0^t ds \exp(2B^{(\nu)}_s)$.

En toute rigueur, il faut être plus précis pour cet énoncé, et distinguer selon que : $\nu \geq 0$, ou $\nu < 0$.
En effet, pour $\nu \geq 0$, il n'est pas difficile de montrer que : $A_\infty^{(\nu)} = \infty$, $Pp.s$, et donc, la formule (5.5) permet de "dévoiler" le processus $(R_u^{(\nu)}, u \geq 0)$ indexé par tout $\mathbb{R}_+$.
Par contre, si $\nu < 0$, alors : $A_\infty^{(\nu)} < \infty$, $Pp.s$, et donc, la formule (5.5) ne permet de définir que le processus $(R_u^{(\nu)}, u \leq A_\infty^{(\nu)})$.
Comme, dans ce cas $B_t^{(\nu)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on obtient :

$$A_\infty^{(\nu)} = T_0(R^{(\nu)})$$

(premier) temps d'atteinte de 0 par $R^{(\nu)}$.
Pour démontrer la formule (5.5), tout au moins dans le cas simple où $\nu \geq 0$, il suffit d'appliquer la formule d'Itô à $\exp(2B_t^{(\nu)}), t \geq 0$, puis de faire le changement de temps inverse de $A_t^{(\nu)}, t \geq 0$, pour faire apparaître l'équation (5.1) pour le processus $(R_u^{(\nu)})^2$.

Théorème 5.1.

Références

[5.A]

[5.A.1] De Blassie. xxx. xxx.

[5.A.2] J.F. Le Gall. xxx. xxx.

[5.A.3] J.F. Le Gall. xxx. xxx.

[5.A.4] N. Ikeda, S. Watanabe. Stochastic differential equations. North-Holland, Kodansha, 1981.

[5.B]

[5.B.1] J. Pitman et M. Yor. Bessel processes and infinitely divisible laws. In Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), volume 851 of Lecture Notes in Math., pages 285–370. Springer, Berlin, 1981.

[5.B.2] J. Pitman et M. Yor. A decomposition of Bessel bridges. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 59(4) :425–457, 1982.

[5.B.3] J. Pitman et M. Yor. Sur une décomposition des ponts de Bessel. In Functional analysis in Markov processes (Katata/Kyoto, 1981), volume 923 of Lecture Notes in Math., pages 276–285. Springer, Berlin, 1982.

[5.B.4] M. Yor. On square-root boundaries for Bessel processes, and pole-seeking Brownian motion. In Stochastic analysis and applications (Swansea, 1983), volume 1095 of Lecture Notes in Math., pages 100–107. Springer, Berlin, 1984.

[5.B.5] J.-F. Le Gall et M. Yor. Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 303(3) :73–76, 1986.

[5.B.6] J. Pitman et M. Yor. Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. Astérisque, (236) :249–276, 1996. Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu.

[5.B.7] A. Göing-Jaeschke et M. Yor. A survey and some generalizations of Bessel processes. Bernoulli, 9(2) :313–349, 2003.

[5.B.8] D. Revuz et M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 3rd edition, 1999.

6 Thème 6. Nombre de tours du mouvement brownien plan

(6.a) Le mouvement brownien plan $(Z_t, t \geq 0)$, issu de $z_0 \neq 0$, ne visite presque sûrement pas le point 0. (On peut bien sûr changer le couple $(z_0, 0)$ en (a, b), avec $a \neq b$). Ce résultat (de polarité des points pour Z) est dû à Paul Lévy, qui, plus généralement, a établi l'invariance conforme du mouvement brownien plan (vers 1943) ; de façon précise, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, et non constante, alors, il existe un second mouvement brownien plan $(\widehat{Z}_u, u \geq 0)$ tel que :

$$f(Z_t) = \widehat{Z}_{\int_0^t du |f'(Z_u)|^2} \quad , \qquad t \geq 0. \tag{6.1}$$

Prenons par exemple $f(z) = \exp(z)$; alors, la formule (6.1) devient, en écrivant $X_t = Re(Z_t)$:

$$\exp(Z_t) = \widehat{Z}_{\int_0^t du \exp(2X_u)} . \tag{6.2}$$

Ainsi, le mouvement brownien plan $(\widehat{Z}_h, h \geq 0)$, issu de $\widehat{z} = \exp(z_0)$ ne visite presque sûrement pas le point 0, puisque $\widehat{Z}$ peut s'écrire, à un changement de temps près sous forme exponentielle : le membre de gauche de (6.2).
Cette démonstration lumineuse de la polarité des points pour le mouvement

brownien plan a été donnée par B. Davis [6.A.6], qui, dans le même article donne une démonstration à l'aide du mouvement brownien plan du "grand théorème de Picard" : ——-
Depuis lors, on ne compte plus les applications de la propriété d'invariance conforme du mouvement brownien plan, soit pour établir des propriétés du mouvement brownien plan lui-même, ou de processus qui s'y rattachent (par exemple : les fameux processus SLE), soit pour donner des démonstrations browniennes de théorèmes portant sur les fonctions méromorphes (exemple : les théorèmes de Nevanlinna, revisités par K. Carne [–], et d'autres auteurs : Taniguchi, Gruet).
Venons en maintenant plus précisément au sujet de ce thème : l'étude (en fait asymptotique, lorsque $t \to \infty$) des nombres de tours de $(Z_u, u \leq t)$ lorsque $Z_0 = z_0$ autour d'un nombre fini de points $(z_1, ..., z_n)$ avec $z_i \neq z_j, 0 \leq i < j \leq n$. On note $(\theta_t^{z_i}, t \geq 0)$ une détermination continue du nombre de tours de $(Z_u, u \leq t)$ lorsque t varie, autour de $z_i (1 \leq i \leq ??)$.
Cette étude commence en 1958 avec 2 résultats apparemment très différents :
a) F. Spitzer montre que :

$$\frac{2}{\log t} \theta_t^{z_i} \xrightarrow[t \to \infty]{(d)} \mathcal{C}_i$$

où $\mathcal{C}_i$ est une variable de Cauchy standard.
b) Harris et Robbins montrent que, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est bornée, à support compact (pour simplifier), alors :

$$\frac{1}{\log t} \int_0^t ds f(Z_s) \xrightarrow[t \to \infty]{(d)} \left(\frac{\overline{f}}{2\pi} \right) \mathcal{E}$$

où $\mathbb{E}$ désigne une variable exponentielle, d'espérance 1, et $\overline{f} = \int \int dx dy f(y)$.
En fait, ces 2 résultats peuvent être présentes conjointement, ainsi que la convergence en loi de

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{z_i}, ..., \theta_t^{z_n})$$

lorsque $t \to \infty$.

Théorème 6.1.

Références

[6.A]

[6.A.1] F. Spitzer. Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87, pages 187–197, 1958.

[6.A.2] P. Lévy. Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948.

[6.A.3] C. Belisle. Windings of random walks. Ann. Probab. 17, no. 4, pages 1377–1402, 1989.

[6.A.4] C. Belisle et J. Faraway. Winding angle and maximum winding angle of the two-dimensional random walk. J. Appl. Probab. 28, no. 4, pages 717–726, 1991.

[6.A.5] K. Carne. Brownian motion and Nevanlinna theory. Proc. London Math. Soc, 52, p. 349–368, 1986.

[6.A.6] B. Davis. Brownian Motion and Analytic Functions. Ann. Prob. 7, p. 913–932, 1979.

[6.A.7] A. Atsuji. On the growth of meromorphic functions on the unit disc and conformal martingales. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 3, p. 45–56, 1996.

[6.A.8] A. Atsuji. Nevanlinna theory via stochastic calculus. J. Funct. Anal. 132, p. 473–510, 1995.

[6.A.9] J.C Gruet. Nevanlinna theory, Fuschian functions and Brownian motion windings. Revista Math. Ibero-Americana 18-2, p. 301–324, 2002.

[6.B]

[6.B.1] M. Yor. Loi de l'indice du lacet brownien, et distribution de Hartman-Watson. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 53(1) :71–95, 1980.

[6.B.2] P. Messulam et M. Yor. On D. Williams' "pinching method" and some applications. J. London Math. Soc. (2), 26(2) :348–364, 1982.

[6.B.3] M. Yor. Une décomposition asymptotique du nombre de tours du mouvement brownien complexe. Astérisque, (132) :103–126, 1985. Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 2 (Palaiseau, 1983).

[6.B.4] J. Pitman et M. Yor. Asymptotic laws of planar Brownian motion. Ann. Probab., 14(3) :733–779, 1986.

[6.B.5] J. Pitman et M. Yor. The asymptotic joint distribution of windings of planar Brownian motion. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 10(1) :109–111, 1984.

[6.B.6] J.-F. Le Gall et M. Yor. Étude asymptotique des enlacements du mouvement brownien autour des droites de l'espace. Probab. Theory Related Fields, 74(4) :617–635, 1987.

[6.B.7] J. Pitman et M. Yor. Further asymptotic laws of planar Brownian motion. Ann. Probab., 17(3) :965–1011, 1989.

[6.B.8] J.-F. Le Gall et M. Yor. Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. Trans. Amer. Math. Soc., 317(2) :687–722, 1990.

[6.B.9] M. Yor. Étude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes corrélés. In Random walks, Brownian motion, and interacting particle systems, volume 28 of Progr. Probab., pages 441–455. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

7 Thème 7. Valeurs principales et transformée de Hilbert des temps locaux browniens

A t fixé, la fonction $a \to L_t^a(\omega)$ des temps locaux du mouvement brownien réel est holdérienne d'ordre $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci permet de montrer facilement que :

$$I_a(t) = \lim_{(} \varepsilon \to 0) \left(\int_0^t \frac{ds}{(B_s - a)} \right)$$

existe presque surement et on peut définir :

$$I_a^{(\alpha)}(t) = \lim_{(} \varepsilon \to 0) \int_0^t \frac{ds}{|B_s - a|^\alpha} \mathrm{sgn}(B_s - a) 1_{(|B_s - a| \geq \varepsilon)}$$

Cette remarque figure déjà sous forme de Problème dans le livre de Itô-Mc Kean. Pour simplifier la discussion qui sont, prenons maintenant $a = 0$, et $\alpha = 1$. Parmi les différentes propriétés remarquables de $(I(t), t \geq 0)$, celle qui m'a le plus intrigué est la suivante : si $(\tau_\ell, \ell \geq 0)$ désigne l'inverse du temps local en 0, alors $(I(\tau_\ell, \ell \geq 0))$ est un processus de Cauchy symétrique. Plus précisément, $\left(\frac{1}{\pi} I(\tau(\ell)), \ell \geq 0\right)$ est un processus de Cauchy standard. On ne peut s'empêcher d'essayer de comparer ce résultat avec la représentation bien connue du processus de Cauchy standard, donnée par F. Spitzer en 1958, sous la forme :

$$(\beta_{\tau(\ell)}, \ell \geq 0) \tag{7.1}$$

où $(\beta_u, u \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, indépendant de $(\tau(\ell), \ell \geq 0)$. La question naturelle qui se pose alors est : quelle est la loi du couple :

$$\left(\left(\frac{1}{\pi}I(\tau(\ell)),\tau(\ell)\right);\ell\geq 0\right) \tag{7.2}$$

C'est bien sûr un processus de Lévy 2-dimensionnel, dont la première composante est un processes de Cauchy, et la seconde un subordinateur stable d'indice (1/2).
Une conjecture naïve, qui permettrait d'expliquer la loi de la première composante de (7.2) serait que, conditionnellement à $\tau(\ell)=t$, $\frac{1}{\pi}I(\tau(\ell))\equiv\frac{1}{\pi}I(t)$ serait une variable Gaussienne centrée, de variance t.
Il n'en est pas du tout ainsi, comme le Théorème suivant, extrait de [7.B.2], le montre.

Théorème 7.1. *xxx*

A l'aide de la théorie des excursions d'Itô, on peut passer assez aisément du résultat du théorème 7.1 à une compréhension de la loi de $\frac{1}{\pi}I(T_\lambda)$, et même plus généralement :

$$\left(\frac{1}{\pi}I(T_{g_{\lambda_\lambda}}),\frac{1}{\pi}\left(I(T_\lambda)-I(T_{g_{\lambda_\lambda}})\right)\right)$$

où T_λ est une variable exponentielle de paramètre λ, indépendante du mouvement brownien B, $g_t=\sup\{s<t:B_s=0\}$.

Théorème 7.2. *xxx*

Références

[7.A]

[7.A.1] J. Bertoin. Lévy processes. (See, especially, Chapter —) Cambridge Univ. Press, 1996.

[7.A.2] P. Fitzsimmons et R.K. Getoor. On the distribution of the Hilbert transform of the local time of a symmetric Lévy process. Ann. Probab. 20, no. 3, pages 1484–1497, 1992.

[7.A.3] J. Bertoin et M.E. Caballero. xxx. xxx.

[7.A.4] T. Yamada. Principal values of Brownian local times and their related topics. In Itô's stochastic calculus and probability theory, Springer, Tokyo, pages 413–422, 1996.

[7.A.5] M. Yor (éditeur). Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Revista Matemàtica Iberoamericana, Madrid, 1997.

[7.B]

[7.B.1] M. Yor. Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens, et une extension de la formule d'Itô. In Seminar on Probability, XVI, volume 920 of Lecture Notes in Math., pages 238–247. Springer, Berlin, 1982.

[7.B.2] Ph. Biane et M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Math. (2), 111(1) :23–101, 1987.

8 Thème 8. Temps locaux d'intersection du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

Entre 1950 et 1960, Dvoretzky, Erdös, Kakutani et Taylor ont montré, à l'aide d'arguments élémentaires sur le mouvement brownien, que :
- pour la dimension 2, le mouvement brownien admet des points multiples de tous ordres ;
- pour la dimension 3, le mouvement brownien admet des points ? ? ?

Références

[8.A]

[8.A.1] J.F. Le Gall. Some properties of planar Brownian motion. Ecole d'été de St-Flour, Springer, 1992.

[8.A.2] J. Rosen. xxx. xxx.

[8.A.3] E. Dynkin. xxx. xxx.

[8.A.4] D. Khoshnevisan. xxx. xxx.

[8.A.5] W. Werner. xxx. xxx.

[8.B]

[8.B.1] J. Rosen et M. Yor. Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane. Ann. Probab., 19(1) :142–159, 1991.

[8.B.2] M. Yor. Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. In Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, volume 1123 of Lecture Notes in Math., pages 332–349. Springer, Berlin, 1985.

[8.B.3] M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$. In Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, volume 1123 of Lecture Notes in Math., pages 350–365. Springer, Berlin, 1985.

9 Thème 9. Identités en loi entre fonctionnelles quadratiques du mouvement brownien ; identités de Ciesielski-Taylor

(9.a) Appelons fonctionnelle linéaire du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ un élément générique de son premier chaos, soit l'intégrale de Wiener $I(f) = \int_0^\infty f(s)dB_s$, pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+, ds)$. La réponse à la question : à quelles conditions est ce que $I(f)$ et $I(g)$ ont elles même loi immédiate ; c'est :

$$\int_0^\infty f^2(s)ds = \int_0^\infty g^2(s)ds \tag{9.1}$$

car $I(f)$ et $I(g)$ sont deux variables gaussiennes centrées dont les variances sont les parties gauche et droite de (9.1).
(9.b) Appelons maintenant fonctionnelle quadratique du mouvement brownien une intégrale :

$$I^{(2)}(h) = \int_0^\infty ds \left(\int_0^\infty dB_t h(t,s) \right)^2$$

où h satisfait :

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt h^2(t,s) < \infty$$

(Le lecteur s'attendant peut être, à la suite de (9.a) que l'on définisse une fonctionnelle quadratique comme :

$$J^{(2)}(h) = \int_0^\infty dB_s \int_0^s dB_t h(t,s) \ ,$$

sous la condition d'intégrabilité :

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt h^2(t,s) < \infty \ ,$$

mais, la discussion qui suit se prête mieux à la définition $I^{(2)}$.)
De même qu'en (9.a), on peut se demander sous quelle condition sur h et k est ce que : $I^{(2)}(h) \stackrel{\text{(loi)}}{=} I^{(2)}(k)$?
L'objet principal de ce Thème 9 est simplement d'énoncer le

Théorème 9.1. *Une condition suffisante pour que : $I^{(2)}(h) \stackrel{\textit{(loi)}}{=} I^{(2)}(k)$ est :*

$$k(t,s) = h(s,t)$$

et de donner un certain nombre d'exemples de ce résultat.

Démonstration : il suffit d'écrire, grâce au théorème de Fubini :

$$\int_0^\infty dB_s \int_0^\infty dC_t h(s,t) = \int_0^\infty dC_s \int_0^\infty dB_s h(s,t)$$

où B et C désignent deux mouvements browniens indépendants et d'identifier les fonctions caractéristiques de chacun des deux membres à l'aide des transformées de Laplace de $I^{(2)}(h)$ et $I^{(2)}(k)$.
(9.c) Exemples

(9.d) Une question plus générale est une autre explication du théorème.

Références

[9.A]

[9.A.1] B. Gaveau, Faschini et L. Shepp. xxx. In Liber Amicorum, Moshi Zakaï... 1991.

[9.B]

[9.B.1] C. Donati-Martin et M. Yor. Fubini's theorem for double Wiener integrals and the variance of the Brownian path. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 27(2) :181–200, 1991.

[9.B.2] M. Yor. Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 27(2) :201–213, 1991.

[9.B.3] C. Donati-Martin et M. Yor. Extension d'une formule de Paul Lévy pour la variation quadratique du mouvement brownien plan. Bull. Sci. Math., 116(3) :353–382, 1992.

[9.B.4] C. Donati-Martin et M. Yor. On some examples of quadratic functionals of Brownian motion. Adv. in Appl. Probab., 25(3) :570–584, 1993.

[9.B.5] C. Donati-Martin, S. Song, et M. Yor. On symmetric stable random variables and matrix transposition. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 30(3) :397–413, 1994.

[9.B.6] C. Donati-Martin, S. Song, et M. Yor. Symmetric stable processes, Fubini's theorem, and some extensions of the Ciesielski-Taylor identities in law. Stochastics Stochastics Rep., 50(1-2) :1–33, 1994.

[9.B.7] Z. Shi et M. Yor. On an identity in law for the variance of the Brownian bridge. Bull. London Math. Soc., 29(1) :103–108, 1997.

10 Thème 10. Fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien ; options asiatiques

Références

[10.A]

[10.A.1] D. Dufresne. xxx xxx

[10.A.2] D. Dufresne. xxx xxx

[10.A.3] Tolmatz. xxx xxx

[10.A.4] Schröder. xxx xxx

[10.B]

[10.B.1] H. Geman et M. Yor. Quelques relations entre processus de Bessel, options asiatiques et fonctions confluentes hypergéométriques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 314(6) :471–474, 1992.

[10.B.2] M. Yor. Sur les lois des fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, considérées en certains instants aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 314(12) :951–956, 1992.

[10.B.3] M. Yor. Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. J. Appl. Probab., 29(1) :202–208, 1992.

[10.B.4] M. Yor. On some exponential functionals of Brownian motion. Adv. in Appl. Probab., 24(3) :509–531, 1992.

[10.B.5] M. Yor. On some exponential-integral functionals of bessel processes. Prépublication nř106. Labo. Probas.(Avril 1992). Mathematical Finance (Proceedings de la Conférence d'Oberwolfach d'AoÛt 1992),, 3(2) :229–239, 1993.

[10.B.6] H. Geman et M. Yor. Bessel processes, asian options and perpetuities. Mathematical Finance, 3(4) :349–375, 1993.

[10.B.7] M. Yor. From planar Brownian windings to Asian options. Insurance Math. Econom., 13(1) :23–34, 1993.

[10.B.8] L. Alili, D. Dufresne, et M. Yor. Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien avec drift. In Exponential functionals and principal values related to Brownian motion, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 3–14. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.

[10.B.9] Y. Hu, Z. Shi, et M. Yor. Some applications of Lévy's area formula to pseudo-Brownian and pseudo-Bessel bridges. In Exponential functionals and principal values related to Brownian motion, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 181–209. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.

[10.B.10] A. Comtet, C. Monthus, et M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems. J. Appl. Probab., 35(2) :255–271, 1998.

[10.B.11] H. Matsumoto et M. Yor. On Dufresne's relation between the probability laws of exponential functionals of Brownian motions with different drifts. Adv. in Appl. Probab., 35(1) :184–206, 2003. In honor of Joseph Mecke.

[10.B.12] H. Matsumoto et M. Yor. xxx. Prob. Surveys.

[10.B.13] H. Matsumoto et M. Yor. xxx. Prob. Surveys.

[10.B.14] J. Bertoin et M. Yor. Exponential Functionals of Lévy processes. Prob. Surveys, vol. 2, p. 191–212, 2005.

11 Thème 11. Lois de l'arc sinus de Paul Lévy ; généralisations

Références

[11.A]

[11.A.1] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio Math., 1939.

[11.1] J. Pitman et M. Yor. Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator. Proc. London Math. Soc. (3), 65(2) :326–356, 1992.

[11.2] Ph. Carmona, F. Petit, et M. Yor. Some extensions of the arc sine law as partial consequences of the scaling property of Brownian motion. Probab. Theory Related Fields, 100(1) :1–29, 1994.

[11.3] J. Bertoin et M. Yor. Some independence results related to the arc-sine law. J. Theoret. Probab., 9(2) :447–458, 1996.

[11.4] J. Pitman et M. Yor. The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. Ann. Probab., 25(2) :455–500, 1997.

[11.5] M. Yor. On certain discounted arc-sine laws. Stochastic Process. Appl., 71(1) :111–122, 1997.

[11.6] P. Carmona, F. Petit, et M. Yor. An identity in law involving reflecting Brownian motion, derived from generalized arc-sine laws for perturbed Brownian motions. Stochastic Process. Appl., 79(2) :323–333, 1999.

[11.7] A. Rouault, M. Yor, et M. Zani. A large deviations principle related to the strong arc-sine law. J. Theoret. Probab., 15(3) :793–815, 2002.

12 Thème 12. Excursions browniennes : théorie et applications

(12.a) Appelons, informellement, excursion brownienne, tout "morceau" de la trajectoire brownienne situé entre deux zéros, par exemple : $(B_{g_t+u}; u \leq d_t - g_t)$, où : $g_t := \sup\{u \leq t : B_u = 0\}$ et $d_t = \inf\{u > t : B_u = 0\}$. Un problème, traité essentiellement par Lévy et Chung consiste à décrire la loi de cette partie de la trajectoire brownienne : c'est, à une renormalisation près, un pont de Bessel de dimension 3. Itô [12.A.1] a entrepris une toute autre démarche, en décrivant l'ensemble de toutes les excursions browniennes, "ensemble" étant compris comme une sorte de processus. En fait, le résultat d'Itô est que, informellement, l'ensemble de toutes les excursions browniennes peut être décrit au moyen d'un "gigantesque" processus de Poisson, un peu plus précisément : un processus de Poisson ponctuel. Voici le résultat d'Itô :

Théorème 12.1. *Soit Γ Borélien de "l'ensemble des excursions" E. Considérons $N_\ell^\Gamma = \sum_{\lambda \leq \ell} 1_{(e_\lambda \in \Gamma)}$ où $e_\lambda(u) \equiv B_{\tau_{\lambda-}+u} - B_{\tau_{\lambda-}}$, $u \leq \tau_\lambda - \tau_{\lambda-}$, et $\tau_\lambda = \inf\{s : \ell_s > \lambda\}$, (ℓ_s) désignant le temps local en 0 de B. Alors, ou bien le processus $(N_\ell^\Gamma, \ell \geq 0)$ est identiquement infini, ou bien $(N_\ell^\Gamma, \ell \geq 0)$ est un processus de Poisson.*

Pour pouvoir "travailler" à partir de ce théorème, il faut bien connaître le paramètre $n(\Gamma) \equiv E[N_1^\Gamma]$ de ce processus de poisson. en fait, cette formule permet de définir une mesure σ-infinie sur E, appelée mesure d'Itô des excursions browniennes dont plusieurs auteurs ont donné de très belles descriptions.

Description d'Itô : i) Soit $\bigvee = \inf\{t > 0 : \varepsilon(t) = 0\}$. Alors, $n(\bigvee \in dt) = \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}$.

ii) Conditionnellement à $\bigvee = t$, le processus $(|\varepsilon(u)|, u \leq t)$ est un pont de Bessel de dimension 3, et de longueur (= durée) t.

Description de Williams : i) Soit $M = \sup_{u \geq 0} |\varepsilon(u)|$. Alors : $n(M + dm) = \frac{dm}{m^2}$;

ii) Conditionnellement à $M = m$, le processus $(|\varepsilon(u)|, u \leq \bigvee)$ est obtenu en mettant deux processus de Bessel de dimension 3 dos à dos, jusqu'en leur premier temps d'atteinte du niveau m. (Il existe également une description dûe à J.M. Bismut, mais que j'ai moins utilisé).

Références

[12.A]

[12.A.1] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III : Probability theory, pages 225–239. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

[12.A.2] P.A. Meyer. Processus de Poisson ponctuels, d'après K. Itô. Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, année universitaire 1969–1970), pages 177–190. Lecture Notes in Math., Vol. 191, Springer, Berlin, 1971.

[12.B]

[12.B.1] J. Pitman et M. Yor. Decomposition at the maximum for excursions and bridges of one-dimensional diffusions. In Itô's stochastic calculus and probability theory, pages 293–310. Springer, Tokyo, 1996.

[12.B.2] J. Pitman et M. Yor. On the lengths of excursions of some Markov processes. In Séminaire de Probabilités, XXXI, volume 1655 of Lecture Notes in Math., pages 272–286. Springer, Berlin, 1997.

[12.B.3] J. Pitman et M. Yor. On the relative lengths of excursions derived from a stable subordinator. In Séminaire de Probabilités, XXXI, volume 1655 of Lecture Notes in Math., pages 287–305. Springer, Berlin, 1997.

[12.B.4] M. Jeanblanc, J. Pitman, et M. Yor. The Feynman-Kac formula and decomposition of Brownian paths. Mat. Apl. Comput., 16(1) :27–52, 1997.

[12.B.5] J. Pitman et M. Yor. Ranked functionals of Brownian excursions. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326(1) :93–97, 1998.

[12.B.6] J. Pitman et M. Yor. Laplace transforms related to excursions of a one-dimensional diffusion. Bernoulli, 5(2) :249–255, 1999.

[12.B.7] P. Biane et M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Maths, 1987.

13 Thème 13. Quelques questions de filtrations : Weak and Strong Brownian filtrations

(13.a) On peut estimer, à l'heure actuelle (: 2010 !) que l'on connait relativement bien la filtration brownienne, c'est-à-dire la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple, on sait (voir Thème 1) que toute martingale est une intégrale stochastique par rapport à ce mouvement brownien, que tout temps d'arrêt est prévisible, etc...

(13.b) Par contre, la question suivante n'est pas du tout aisée, et n'a pas de réponse simple : supposons que l'on vous présente une filtration $(\mathcal{F}_t)_t \geq 0$, par exemple engendrée par un certain processus $(X_t)_t \geq 0$, et on vous demande si cette filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien... Vous allez pouvoir répondre négativement si, par exemple, vous savez exhiber une martingale purement discontinue, etc... Mais, on est encore loin du compte ! Ceci m'a amené à introduire la notion de filtration brownienne faible, définie comme une filtration par rapport à laquelle il existe un mouvement brownien $(\beta_t, t \geq 0)$, et toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale peut s'écrire comme intégrale stochastique par rapport à $(d\beta_t)$. Les exemples de filtrations browniennes faibles abondent :
a) si Q est une probabilité sur l'espace canonique $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, localement équivalente à W, la mesure de Wiener, alors, sous Q, la filtration naturelle, celle de $W_t(\omega) \equiv_o mega(t), t \geq 0$, est faiblement brownienne.
b) Soit $(\tau_u, u \geq 0)$, une famille croissante de temps d'arrêt (attention : vérifier les conditions) par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ sous W ; alors, $\mathcal{F}_{\tau_u}, u \geq 0$ est une filtration faiblement brownienne (ref : Emery-Schachermayer).
(13.c) Ceci m'a amené, dès [[13.B.1]], à faire la conjecture : (C) toute fil-

tration faiblement brownienne est fortement brownienne. Comme on va le voir dans la discussion qui suit, cette conjecture était bien naïve, et complètement fausse. Pourquoi ai-je cru qu'elle était vraie ? J'avais surtout à l'esprit l'exemple suivant : considérons la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$, ainsi que le $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s, t \geq 0$. Celui-ci engendre faiblement $(\mathcal{F}_t)$, puisqu'il suffit d'écrire :

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$$

Bien sûr, pour tout $s > 0$ fixé, $\operatorname{sgn}(B_s)$ est une variable de Bernoulli indépendante de $(\beta_u, u \geq 0)$, mais en adjoignant ce processus des signes (de B) à β, on retrouve bien B.

Mon idée neuve était que, de façon générale, si β engendre faiblement $(\mathcal{F}_t)$, alors on peut commencer par adjoindre à β un processus (ε_s) prévisible, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, tel que le mouvement brownien :

$$\beta_t^{(\varepsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \varepsilon_s d\beta_s \ , \ t \geq 0 \ ,$$

ait comme filtration naturelle celle du couple (β, ε). On a donc ainsi enrichi la filtration de β, i.e :

$$\mathcal{F}_t^{(\beta)} \hookrightarrow \mathcal{F}_t^{(\beta^{(\varepsilon)})} \hookrightarrow \mathcal{F}_t$$

On peut continuer (par quelle méthode, je ne sais...) cet enrichissement, et ainsi, de proche en proche, si besoin est transfiniment, on finira bien par récupérer $(\mathcal{F}_t)$! !

(13.d) Tout ce programme n'est qu'un château de cartes, sans fondement solide, comme cela a été si bien montré par Tsirel'son en [13.A.1] : si l'on considère la filtration naturelle de l'araignée brownienne à N branches ($N \geq 3$), celle-ci est bien faiblement brownienne, mais pas fortement brownienne.

Qu'est-ce l'araignée brownienne à N branches (que l'on notera $(A_t^N, t \geq 0)$) ? C'est informellement un processus qui se déplace continuellement sur chacune de ces demi-droites comme un mouvement brownien, et qui lorsqu'elle revient en l'origine, choisit de partir sur une (autre) demi-droite avec probabilité uniforme, "like Stephen Leacock's hero" comme l'a si bien décrit J. Walsh en [–]. Pour une description moins lyrique, voir Barlow-Pitman-Yor [–].

La filtration naturelle de $(A_t^N, t \geq 0)$ est bien faiblement brownienne, car elle est faiblement engendrée par le mouvement brownien directeur du mouvement brownien réfléchi : $|A_t^N|$ qui est la distance de A_t^N à l'origine.

? ainsi que le montre, le 1$^{\text{er}}$, Tsirel'son en [13.A.1] à l'aide d'un argument de couplage.
En fait, ce résultat ("négatif", au même titre que le théorème de Fermat ! !) avait déjà été conjecturé par Barlow qui "affirmait" : dans une filtration fortement brownienne, si G est la fin d'un ensemble prévisible, alors :

$$\mathcal{F}_{G^+} = \mathcal{F}_{G^-} \vee \sigma(\Gamma) \ ,$$

pour, au plus, un ensemble Γ.
Or, clairement, il n'en est pas ainsi pour la filtration naturelle de (A_t^N), car si $g_t^N = \sup\{s < t : A_s^N = 0\}$, on a :

$$\mathcal{F}_{(g_t^N)^+} = \mathcal{F}_{(g_t^N)^-} \vee \sigma\{A_t^N \in I_i ; i = 1, 2, ..., N-1\}$$

où les $(I_i)_{i=1,2,\ldots,N}$ sont les N 1/2-droites concurrentes.
En fait, les simplifications, entre autres par Tsirel'son lui-même de sa démonstration d'origine (cf. par exemple, [13.B.3]) permettront de démontrer la conjecture de Barlow, faisant apparaître, à partir du résultat "négatif" (: toute filtration faiblement brownienne n'est pas nécessairement fortement brownienne) un (au moins) résultat positif : la conjecture de Barlow est vraie. Là encore, j'ai envie de faire le parallèle avec la théorie de Fermat, et de me moquer des poseurs de l'éternelle question stupide : "à quoi ça sert" ?

Références

[13.A]

[13.A.1] B. Tsirel'son Triple points : from non-Brownian filtrations to harmonic measures. Geom. Funct. Anal. 7, no. 6, pages 1096–1142, 1997.

[13.A.2] B. Tsirel'son Within and beyond the reach of Brownian innovation. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998). Doc. Math., Extra Vol. III, pages 311–320 (electronic), 1998.

[13.A.3] Dubins, Feldman, Smirdinsky, Tsirel'son . .

[13.A.4] M. Emery et W. Schachermayer. . .

[13.A.5] Watanabe . .

[13.A.6] Warren, Watanabe. . .

[13.B]

[13.B.1] M. Yor. Sur l'étude des martingales continues extrêmales. Stochastics, 2(3) :191–196, 1979.

[13.B.2] M. T. Barlow, M. Émery, F. B. Knight, S. Song, et M. Yor. Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes. In Séminaire de Probabilités, XXXII, volume 1686 of Lecture Notes in Math., pages 264–305. Springer, Berlin, 1998.

[13.B.3] M. Émery et M. Yor. Sur un théorème de Tsirelson relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux. In Séminaire de Probabilités, XXXII, volume 1686 of Lecture Notes in Math., pages 306–312. Springer, Berlin, 1998.

14 Thème 14. Quantiles browniens et options exotiques

Références

[14.A]

[14.A.1] A. Dassios . .

[14.A.2] T. Fujita . .

[14.B]

[14.B.1] M. Yor. The distribution of Brownian quantiles. J. Appl. Probab., 32(2) :405–416, 1995.

[14.B.2] P. Embrechts, L. C. G. Rogers, et M. Yor. A proof of Dassios' representation of the α-quantile of Brownian motion with drift. Ann. Appl. Probab., 5(3) :757–767, 1995.

[14.B.3] M. Chesney, M. Jeanblanc-Picqué, et M. Yor. Brownian excursions and Parisian barrier options. Adv. in Appl. Probab., 29(1) :165–184, 1997.

[14.B.4] H. Geman et M. Yor. Pricing and hedging double-barrier options : a probabilistic approach. Mathematical Finance, 6 :365–378, 1996.

[14.B.5] M. Yor, M. Chesney, H. Geman, et M. Jeanblanc-Picqué. Some combinations of Asian, Parisian and barrier options. In Mathematics of derivative securities (Cambridge, 1995), volume 15 of Publ. Newton Inst., pages 61–87. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[14.B.6] J. Bertoin, L. Chaumont, et M. Yor. Two chain-transformations and their applications to quantiles. J. Appl. Probab., 34(4) :882–897, 1997.

15 Thème 15. Formule de balayage et questions connexes

(15.a) Un des charmes (ou une des difficultés) du calcul d'Itô est qu'il met en jeu les différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pour simplifier), lorsqu'elles sont composées avec le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Écrivons, une fois de plus, la formule d'Itô :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s) {\scriptstyle\bullet} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s) ds$$

Cela amène à discuter / mettre en jeu / même en dimension 1 des équations différentielles du second ordre, telles que l'équation de Sturm-Liouville. D'où des complications importantes, auxquelles tout probabiliste est confronté...
Il existe toutefois un calcul stochastique "du 1er ordre", moins "complet" que celui d'Itô, mais qui peut rendre quelque service...
Développer avec $f(S_t), f(L_t)$ puis monter au niveau Balayage.

Références

[15.1] M. Yor. Sur le balayage des semi-martingales continues. In Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78), volume 721 of Lecture Notes in Math., pages 453–471. Springer, Berlin, 1979.

[15.2] J. Azéma et M. Yor. Sur les zéros des martingales continues. In Séminaire de Probabilités, XXVI, volume 1526 of Lecture Notes in Math., pages 248–306. Springer, Berlin, 1992.

[15.3] J. Azéma, P.-A. Meyer, et M. Yor. Martingales relatives. In Séminaire de Probabilités, XXVI, volume 1526 of Lecture Notes in Math., pages 307–321. Springer, Berlin, 1992.

[15.4] J. Azéma, T. Jeulin, F. Knight, G. Mokobodzki, et M. Yor. Sur les processus croissants de type injectif. In Séminaire de Probabilités, XXX, volume 1626 of Lecture Notes in Math., pages 312–343. Springer, Berlin, 1996.

[15.5] J. Azéma, T. Jeulin, F. Knight, et M. Yor. Quelques calculs de compensateurs impliquant l'injectivité de certains processus croissants. In Séminaire de Probabilités, XXXII, volume 1686 of Lecture Notes in Math., pages 316–327. Springer, Berlin, 1998.

16 Thème 16. Théorème de plongement de Skorokhod ; exemples

(16.a) Le mouvement brownien est un processus à la fois très "naturel" et très "riche", ce second qualificatif voulant signifier que l'on peut "réaliser" en tant que fonctionnelles du mouvement brownien de nombreux processus aléatoires, ou suites de variables aléatoires, satisfaisant des "contraintes" données à l'avance.

Références

[16.A]

[16.A.1] J. Obloj. . .

[16.B]

[16.B.1] J. Azéma et M. Yor. Une solution simple au problème de Skorokhod. In Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78), volume 721 of Lecture Notes in Math., pages 90–115. Springer, Berlin, 1979.

[16.B.2] J. Azéma et M. Yor. Le problème de Skorokhod : compléments à "Une solution simple au problème de Skorokhod". In Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78), volume 721 of Lecture Notes in Math., pages 625–633. Springer, Berlin, 1979.

[16.B.3] B. Roynette, P. Vallois, et M. Yor. A solution to Skorokhod's embedding for linear Brownian motion and its local time. Studia Sci. Math. Hungar., 39(1-2) :97–127, 2002.

[16.B.4] J. Obłój et M. Yor. An explicit Skorokhod embedding for the age of Brownian excursions and Azéma martingale. Stochastic Process. Appl., 110(1) :83–110, 2004.

17 Thème 17. Pénalisations de fonctionnelles browniennes

(17.a) Le mouvement brownien est un objet tellement parfait que l'on peut avoir parfois envie de construire un objet moins parfait, mais qui lui ressemble sur certains points. (Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?) Disons que, pour que cet objet moins parfait ait un minimum de ressemblance avec le mouvement brownien, on demande que sa loi, que nous noterons $\widetilde{W}$, sur

$C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ soit localement équivalente à W, la mesure de Wiener.
Soyons un peu plus précis, en posant le problème : trouver une loi $\widetilde{W}$ telle que le processus canonique satisfasse, sous $\widetilde{W}$, $\sup_{s\geq 0} X_s < \infty$ $\widetilde{W}$ p.s. Il existe une infinité de solutions à ce problème : la loi $W^{(\mu)}$ de $(B_t + \mu_t, t \geq 0)$, pour tout $\mu < 0$, satisfait bien sûr cette propriété.
(17.b) Nous allons maintenant poser le problème des pénalisations de W de façon plus précise : soit, pour simplifier l'exposition, $(\Gamma_t, t \geq 0)$ processus $(\mathcal{F}_t)$ adapté tel que $0 < W(\Gamma_t) < \infty$, pour tout $t > 0$. Considérons :

$$W_t^\Gamma = \frac{\Gamma_t}{W(\Gamma_t)} \bullet W$$

On dira que l'on a pénalisé W au moyen des processus $(\Gamma_t, t \geq 0)$ s'il existe une probabilité W_∞^Γ sur $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{F}_\infty)$ telle que :
$\forall s > 0$, $\forall H_s$ variable bornée, $\mathcal{F}_s$ mesurable :

$$W_t^G amma(H_s) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W_\infty^G amma(H_s)$$

L'objectif initial de [17.B.4] était de donner de nombreux exemples de pénalisations de W, alors qu'en [17.B.3], les auteurs montrent qu'il existe une mesure σ-finie $\mathcal{W}$ sur $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{F}_\infty)$, qui "régit" toutes $\vee$ pénalisations, c'est à dire telle que, pour tous les processus (Γ_t) pour lesquels on sait montrer qu'il y a pénalisation, alors W_∞^Γ s'exprime à l'aide de $\mathcal{W}$.

(17.c) Nous donnons maintenant quelques exemples.

Exemple 17.1. $\Gamma_t = f(S_t)$*, où* f *est une fonction bornée, à support compact, de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 17.2. $\Gamma_t = \exp(-\int_0^t q(X_s)ds)$*, où* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction borélienne...*

Références

[17.A]

[17.B]

[17.B.1] Y. Hariya et M. Yor. Limiting distributions associated with moments of exponential Brownian functionals. Studia Sci. Math. Hungar., 41(2) :193–242, 2004.

[17.B.2] B. Roynette, P. Vallois, et M. Yor. Les limites associées au mouvement brownien perturbé par des poids exponentiels, I. Studia Sci. Math. Hungar. 43(2), pages 171–246, 2006.

[17.B.3] J. Najnudel, B. Roynette et M. Yor. A global view of Brownian penalisations. MSJ Memoirs, 19. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[17.B.4] B. Roynette et M. Yor. Penalising Brownian paths. Lecture Notes in Mathematics, 1969. Springer, Berlin, 2009.

18 Thème 18. Processus gamma, processus de Dirichlet, lois GGC

Références

[18.1] N.V. Tsilevich, A.M. Vershik, et M. Yor. The Markov-Kreĭn identity and the quasi-invariance of the gamma process. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), 283(Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 6) :21–36, 258, 2001.

[18.2] M. Émery et M. Yor. A parallel between Brownian bridges and gamma bridges. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 40(3) :669–688, 2004.

[18.3] C. Donati-Martin et M. Yor. Some explicit Krein representations of certain subordinators, including the gamma process. Pub. RIMS 42(4), pages 879–895, 2006.

[18.4] C. Donati-Martin et M. Yor. Further examples of explicit Krein representations of certain subordinators. Pub. RIMS 43(2), pages 315–328, 2007.

[18.5] M. Yor. xxx. xxx.

19 Thème 19. Mouvements browniens faibles, martingales de marginales données, PCOC's,...

(19.a) Travail avec H. Föllmer et C.T. Wu.
C'est encore une autre forme des thématiques 13 (: filtrations faiblement browniennes) et 17 (: pénalisations, ou perturbations du mouvement brownien). Reprenons l'idée, sous-jacente de ces thématiques, sous une forme un peu diférente :

Jusqu'où peut-on ressembler au mouvement brownien, et néanmoins lui être différent ?
Ici, nous prenons ce "problème" sous l'habillement suivant : soit $k + \mathbb{N}$. Existe-t-il un processus (X_t), différent du mouvement brownien mais tel que, pour tout k-uplet $(t_1, ..., t_k)$ la loi de $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$ soit celle de $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_k})$, i.e : X et B ont les mêmes marginales de rang k.
En [–], les auteurs montrent qu'il existe une (infinité de) loi(s) $W^{(k)}$, équivalentes à W, et néanmoins différentes, qui satisfont cette propriété.

(19.b) Travail avec Dilip.
Soyons plus modeste : souvent, concernant un phénomène aléatoire donné, il est bien difficile d'avoir accès aux marginales de rang 2, et d'ordre plus élevé. On doit se contenter des marginales de rang 1.
Ceci a amené Madan-Yor [–] à construire, à l'aide de différentes méthodes des martingales (X_t) telles que : $\forall t > 0$ fixé, $X_t \overset{\text{(loi)}}{=} \sqrt{t}X$, pour X variable aléatoire de loi μ donnée.
Ceci est bien sûr un problème de type "problème de Skorokhod" ; cf. : Thème xx.

(19.c) Questions de PCOC.
Admettons que l'on ait résolu le problème posé ci-dessus. Alors, le "processus" $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ est croissant pour l'ordre convexe, au sens où, si $s < t$, et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que : $E[|\psi(\sqrt{t}X)|] < \infty$, la fonction : $t \to E[\psi(\sqrt{t}X)]$ est croissante. Connaissant l'existence de la martingale (X_t), c'est une conséquence de l'inégalité de Jensen.
...... nombreux processus croissants pour l'ordre convexe. Noter l'acronyme amusant : PCOC, et prononcer : Peacock... Les résultats que je connais à ce jour sur ce sujet sont rassemblés dans la monographie [19.B.2], mon intérêt pour les PCOC's ayant été éveillé par le résultat remarquable de Carr-Ewald-Xiao : le processus

$$A_t \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \int_0^t ds \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

est un PCOC.
Après de nombreux essais de compréhension aussi intuitive que possible de ce résultat, Baker-Yor [–] sont parvenus à une démonstration très simple : remarquons que, si $(W_{(s,t)}, s, t \geq 0)$ est un drap brownien standard, alors pour tout t fixé,

$$A_t \overset{\text{(loi)}}{=} \int_0^t ds \exp\left(W_{(s,t)} - \frac{st}{2}\right)$$

et il n'est pas difficile de voir que le membre de droite est une martingale pour la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma\{W_{(s,u)}; s \geq 0, u \leq t\}$. A nouveau, l'inégalité de Jensen implique que le processus $(A_t, t \geq 0)$ est un PCOC.
(19.d) Cette "intervention" (ou plutôt : "importation") du drap brownien dans un problème en faisant intervenir à l'origine que le seul mouvement brownien réel est une illustration de plus de l'efficacité du slogan d'Itô : "considérons même un problème fini-dimensionnel dans un cadre infini-dimensionnel". Le calcul de Malliavin, où le drap brownien joue un rôle si important, est une autre illustration de ce "principe". Hirsch-Roynette-Yor [–] ont présenté la plupart de leurs études de PCOC sous cet angle.
Cela vaut certainement la peine de continuer à méditer sur le principe d'Itô : se placer délibérément dans un cadre infini dimensionnel, alors que l'on traite d'un problème fini dimensionnel, est possible en probabilité (où un espace de probabilité peut toujours être considéré comme un sous espace d'un espace plus vaste...ř, et ce cadre infini dimensionnel "donne de la place" pour voir des choses qui restent "cachées" dans le cadre fini dimensionnel. Le plongement de Skorokhod relève également de cette philosophie...
Remarquons naïvement que, dans la vie courante, nous recherchons souvent à "obtenir plus de place", et que ce programme est souvent difficile à réaliser ! !
(19.e) Une belle généralisation du résultat de Carr-Ewald-Xiao est le

Théorème 19.1. *Si $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale de H^1_{loc}, i.e : $E[\sup_{s \leq t} |M_s|] < \infty$, pour tout $t \geq 0$, alors, le processus : $\left(\frac{1}{t}\int_0^t dsM_s, t \geq 0\right)$ est un PCOC.*

(19.f) Un théorème de Kellerer [–] affirme que si $(\Pi_t, t \geq 0)$ est un PCOC, il existe une martingale $(M_t^\Pi, t \geq 0)$, en général non-unique, telle que : pour tout $t > 0$ fixé,

$$\Pi_t \overset{(\text{loi})}{=} M_t^\Pi$$

Une bonne partie de la monographie [–] est consacrée à chercher à exhiber, $(\Pi_t, t \geq 0)$ étant un PCOC donné, une telle martingale $(M_t^\Pi, t \geq 0)$.

Références

[19.A]

[19.B]

[19.B.1] D.B. Madan et M. Yor. Making Markov martingales meet marginals : with explicit constructions. Bernoulli, 8(4) :509–536, 2002.

[19.B.2] XXX. . .

20 Thème 20. Fonctionnelles exponentielles de processus de Lévy, correspondance de Lamperti

Références

[20.A]

[20.B]

[20.B.1] J. Bertoin et M. Yor. On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential variable. Electron. Comm. Probab., 6 :95–106 (electronic), 2001.

[20.B.2] Jean Bertoin et Marc Yor. On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 11(1) :33–45, 2002.

[20.B.3] J. Bertoin et M. Yor. The entrance laws of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. Potential Anal., 17(4) :389–400, 2002.

[20.B.4] J. Bertoin, P. Biane, et M. Yor. Poissonian exponential functionals, q-series, q-integrals, and the moment problem for log-normal distributions.

21 Thème 21. Formule de Black-Scholes et derniers temps de passage

Références

22 Thème 22. Equation de Tsirel'son, et origine de l'Univers...

Sous-titre : Du processus "bang-bang" au Big bang.

Il ne faut pas prendre le titre ou le sous-titre de ce thème au sérieux ! C'est plutôt un clin d'oeil. Toutefois, ce thème révèle des propriétés extrêmement surprenantes ("mind-boggling" a écrit D. Williams!) que je discuterai en (22.b) et (22.c).

(22.a) L'équation de Tsirel'son.

L'un des objectifs d'Itô, en construisant l'intégrale stochastique, disons, pour simplifier, d'un processus prévisible (H_s) par rapport à un mouvement Brownien (B_s) :

$$\int_0^t H_s dB_s, t \geq 0,$$

lorsque :

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty, Pp.s.,$$

était de développer l'étude des équations différentielles stochastiques :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds. \tag{22.1}$$

En effet, Itô a montré :

- d'une part, que l'argument du point fixe de Picard pour les équations différentielles ordinaires à coefficients lipschitziens s'applique, mutatis mutandis lorsque σ et b sont lipschitziens
- d'autre part, et en conséquence, (22.1) permet de construire un processus de diffusion de coefficients σ et b, sous cette condition de Lipschitz.
  Il a fallu attendre les années 70 pour s'apercevoir que la présence du mouvement brownien en (22.1) permettait d'obtenir existence et unicité des solutions, lorsque, par exemple, $\sigma \equiv 1$, et b est seulement borélienne bornée. Ce résultat est dû à Zvonkin (1974) ; par exemple, lorsque $b(x) = -\lambda \mathrm{sgn}(x)$, avec $\lambda > 0$, on obtient ainsi le processus dit "bang-bang" de paramètre λ, rappelé vers l'origine dès qu'il s'en éloigne.

De plus, même dans cette situation "irrégulière", le processus solution de :

$$X_t = x + B_t + \int_0^t b(X_s) ds \tag{22.2}$$

est obtenu de façon mesurable et adaptée comme fonction de B, (on dit que (X_t) est solution forte) au sens où :

$$X_t = F_x(B_s; s \leq t)\,,\ t \geq 0$$

avec (F_x) famille mesurable en x de fonctionnelles définies sur $C([0,t]; \mathbb{R})$.
La question a ensuite été posée, par A. Shyriaev, de savoir si cette propriété de solution forte demeurait vraie lorsque en (22.2), la fonction $b(x)$, ou le

processus $b(X_s)$, est remplacée, en toute généralité, par une fonctionnelle bornée

$$\beta(X_u; u \leq s)$$

Très rapidement, B. Tsirel'son a apporté un contre exemple avec la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \beta(X_u; u \leq s) &= T(X_u; u \leq s) \\ &= \sum_{k \in -\mathbb{N}} \left\{ \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right\} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s) \end{aligned} \tag{22.3}$$

où $t_k \downarrow 0$ lorsque $k \downarrow -\infty$.
Le théorème (22.1) exprime précisément que X ne peut être construit en fonction de B seulement.
Ce résultat m'ayant extrêmement intrigué, j'ai cherché à comprendre quelles propriétés du mouvement brownien étaient réellement en jeu. En fait, relativement peu ! On se rend vite compte que pour comprendre l'équation de Tsirel'son :

$$X_t = B_t + \int_0^t T(X_u; u \leq s) ds \tag{22.4}$$

il suffit d'en comprendre son squelette discret :

$$\frac{X_{t_{k+1}} - X_{t_k}}{t_{k+1} - t_k} = \frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{(t_{k+1} - t_k)} + \left\{ \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right\} , \tag{22.5}$$

et il est donc naturel d'étudier les propriétés de l'équation :

$$\eta_{k+1} = \xi_{k+1} + \{\eta_k\} \ , \quad k \in -\mathbb{N} \tag{22.6}$$

où les variables $(\xi_k)_{k \in -\mathbb{N}}$ sont indépendantes, et de loi donnée pour tout k (pas nécessairement la même loi). Les propriétés de cette équation, indexée par $-\mathbb{N}$, sont décrites dans le théorème 22.2.

(22.b) Énoncés des théorèmes 22.1 et 22.2.

Théorème 22.1. *L'équation (22.4) jouit de l'unicité en loi. Pour tous $s < t$, la variable $\left\{ \frac{X_t - X_s}{t - s} \right\}$ est uniformément distribuée sur $[0, 1[$, et indépendante du mouvement brownien directeur B. Pour présenter les différents cas possibles concernant l'équation (22.6), il nous faut introduire les notations et préliminaires suivants.*

Théorème 22.2.

(22.c) Développements du thème.

Références

[22.A]

[22.A.1] A. Zvonkin. A transformation of the phase space of a diffusion process that will remove the drift. Mat. Sb. (N.S.) 93(135), 129–149, 152, 1974.

[22.A.2] . xxx xxx

[22.B]

[22.B.1] K. Yano et M. Yor. xxx xxx

[22.B.2] M. Yor. xxx xxx

[22.B.3] M. Yor. xxx xxx

23 Thème 23. Fonction Zeta de Riemann, fonctions theta et mouvement brownien

Références

[23.1] Ph. Biane et M. Yor. Valeurs principales de temps locaux browniens. Bull. Sci. Maths, 1987.

[23.2] Ph. Biane, J. Pitman et M. Yor. xxx xxx

24 Thème 24. Notions et Exemples d'arbitrage

Références

25 Thème 25. Des semi-martingales aux processus de Dirichlet

Références

26 Thème 26. Des processus de Bessel aux SLE

Références

27 Thème 27. Quelques questions d'arbres

Références

28 Thème 28. Fragmentations et Coagulations

Références

29 Thème 29. ? ? ?

Références

30 Thème 30. ? ? ?

Références