19 Février 1985

Sur une variante de l'équation de convolution $\mu = \mu * \nu$

(1)

1. Position du problème.

(1.1) Soit G un groupe abélien, localement compact, et à base dénombrable. Si λ est une mesure positive sur G, on note $S(\lambda)$, resp: $G(\lambda)$, le support de λ, resp: le plus petit sous-groupe fermé de G engendré par $S(\lambda)$.

ν_1 et ν_2 désignent deux mesures positives sur G qui satisfont les propriétés suivantes:

(α) ν_1 et ν_2 sont deux probabilités.

(β) $G(\nu_1) = G(\nu_2) = G$

(γ) $0 \in S(\nu_1) \cup S(\nu_2)$.

Ces hypothèses étant supposées en vigueur tout au long de l'article, on se propose de caractériser les quadruplets $Q = (\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2)$ de mesures positives sur G qui satisfont la propriété suivante:

si $(T_i, X_i)_{i=1,2}$ sont deux paires de variables aléatoires à valeurs dans G telles que:

(P) | (a) pour $i = 1$, ou 2, T_i et X_i sont indépendantes, et ont pour distribution respective μ_i et ν_i;

alors, on a:

(b) $$(T_1 + X_1, T_1) \overset{(d)}{=} (T_2, T_2 + X_2)$$

(1.2) Remarquons tout d'abord que, si le quadruplet Q est solution du problème (P), on a, en particulier:

(P') $$\mu_1 * \nu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_2 * \nu_2 = \mu_1 .$$

Le passage de (P) à (P') utilise de façon fondamentale le fait que ν_1 et ν_2 sont deux probabilités.

Notons également que tout l'intérêt du problème (P) vient de ce que l'on ne peut pas déduire en général de (b) l'identité $\nu_1 = \check{\nu}_2$, à laquelle on est tenté de croire

L'équivalence de ces deux relations provient de ce que Π_1 et Π_2 sont portées par les exponentielles $f \in \mathcal{E}(\check{\vartheta})$, c'est à dire vérifiant :

$$\langle \check{\vartheta}_1, f \rangle \langle \check{\vartheta}_2, f \rangle = 1 .$$

Finalement, on a établi le :

Théorème 2 : Les solutions (μ_1, μ_2) du problème (P') sont les couples de mesures absolument continues par rapport à (dx), dont les densités (continues) $h_i(x)$ $(i=1,2)$ peuvent être représentées sous la forme :

$$h_i(x) = \int f(x)\, d\Pi_i(f) \qquad (i=1,2),$$

les mesures Π_i étant portées par $\mathcal{E}(\vartheta_1 * \vartheta_2)$, et satisfaisant les relations équivalentes :

$$\Pi_2(df) = \Pi_1(df) \langle \check{\vartheta}_1, f \rangle \quad \text{et} \quad \langle \check{\vartheta}_2, f \rangle \Pi_2(df) = \Pi_1(df).$$

3. Solution du problème (P).

Soit $Q = (\mu_1, \vartheta_1 ; \mu_2, \vartheta_2)$ un quadruplet solution de (P).
D'après le théorème 2, on a : $\mu_i(dx) = h_i(x)\,dx$, avec h_i continue $(i=1,2)$.
Écrivons maintenant l'identité en loi (b) sous la forme :

$$(2) \quad \int dx\, h_1(x) \int \vartheta_1(dy)\, \varphi(x+y)\, \psi(x) = \int dx\, h_2(x) \int \vartheta_2(dy)\, \varphi(x)\, \psi(x+y),$$

où φ et ψ désignent deux fonctions positives, continues, à support compact.
Le membre de droite de (2) est égal à :

$$\int \vartheta_2(dy) \int dx\, h_2(x-y)\, \varphi(x-y)\, \psi(x)$$

$$= \int dx \left(\int \check{\vartheta}_2(dy)\, h_2(x+y)\, \varphi(x+y) \right) \psi(x)$$

L'identité du membre de gauche de (2), et de la dernière expression écrite, lorsque ψ varie, entraîne :

$$(3) \qquad h_1(x) \int \vartheta_1(dy)\, \varphi(x+y) = \int \check{\vartheta}_2(dy)\, h_2(x+y)\, \varphi(x+y)$$

identiquement en x, et en φ, fonction continue positive, à support compact.
L'identité (3) équivaut maintenant à :

$$(4) \qquad \text{pour tout } x, \quad h_1(x)\, \vartheta_1(dy) = h_2(x+y)\, \check{\vartheta}_2(dy) .$$

Les mesures $\nu_1(dy)$ et $\check{\nu}_2(dy)$ sont donc équivalentes, et on a :

$$\nu_1(dy) = \ell_2(y)\,\check{\nu}_2(dy) \quad , \text{ avec } \ell_2 \text{ fonction continue.}$$

On déduit ainsi de (4) la relation :

$(4)_1$ pour tout x, $\quad h_2(x+y) = h_1(x)\,\ell_2(y) \quad , \quad \check{\nu}_2(dy)$ p.s.

En prenant $x=0$, on a, en particulier :

$$h_2(y) = h_1(0)\,\ell_2(y) \quad , \quad \check{\nu}_2(dy) \text{ p.s,}$$

et $(4)_1$ devient :

$(4)_2$ pour tout x, $\quad h_2(x+y) = \dfrac{h_1(x)\,h_2(y)}{h_1(0)} \quad , \quad \check{\nu}_2(dy)$ p.s.

D'après l'hypothèse (γ), et l'équivalence de ν_1 et ν_2, $\quad 0 \in S(\check{\nu}_2)$,
et on déduit de $(4)_2$ la relation :

(5) pour tout x, $\quad h_2(x) = \dfrac{h_2(0)}{h_1(0)}\,h_1(x) \quad ,$

ce qui donne, en reportant cette expression de $\dfrac{h_1(x)}{h_1(0)}$ en $(4)_2$:

$(4)_3$ pour tout x, $\quad h_2(x+y) = \dfrac{h_2(x)\,h_2(y)}{h_2(0)} \quad , \quad \check{\nu}_2(dy)$ p.s.

On déduit maintenant de $(4)_3$ l'identité :

(6) $\quad \forall x, y \in G, \quad h_2(x+y) = \dfrac{h_2(x)\,h_2(y)}{h_2(0)}$.

En effet, on vérifie aisément que $I_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ y \in G : \forall x \in G,\ h_2(x+y) = \dfrac{h_2(x)\,h_2(y)}{h_2(0)} \right\}$
est un sous-groupe fermé de G.
D'après $(4)_3$, I_2 contient $S(\check{\nu}_2)$, et donc, d'après l'hypothèse (β), I_2 est identique à G.
L'identité (6) est donc établie ; ainsi, d'après (6) et (5), il existe une exponentielle f telle que :

$$h_1(x) = c_1 f(x) \quad ; \quad h_2(x) = c_2 f(x) \ ,$$

où l'on a posé $\quad c_1 = h_1(0) \quad ; \quad c_2 = h_2(0)$.
De plus, d'après $(4)_1$, on a : $\quad c_2 f(y) = c_1\,\ell_2(y)$, $\quad \check{\nu}_2(dy)$ p.s,
ce qui équivaut, par définition de ℓ_2, à ce que :

$$c_1\,\nu_1(dy) = c_2\,f(y)\,\check{\nu}_2(dy)\ .$$

Finalement, on a donc démontré le

Théorème 3 : Soient ν_1 et ν_2 deux mesures sur G qui satisfont ~~(α)~~ les hypothèses $(\alpha)-(\beta)-(\gamma)$]. Alors, un quadruplet $Q = (\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2)$ est solution du problème (P) si, et seulement si, il existe deux constantes c_1, c_2 positives, et une exponentielle f telles que

$$\mu_i(dx) = c_i\, f(x)\, dx \quad (i=1,2) \quad \text{et} \quad c_1\, \nu_1(dx) = c_2\, f(x)\, \nu_2(dx)$$

Références :

[1] J. Deny : Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$.
Séminaire Brelot - Choquet - Deny (Théorie du Potentiel) ; 4e année, 1959/60.

[2] G. Choquet et J. Deny : Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$.
C.R. Acad. Sciences Paris, t. 250, 1960, p. 799-801.