Sur certaines exponentielles de Doléans associées à la martingale (μ_t).

1. La formule qui définit l'exponentielle de Doléans d'une semi-martingale X sans partie martingale locale continue est :

$$(1.a) \qquad \mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - X_0) \prod_{s \le t} (1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}$$

Supposons maintenant que X soit une martingale locale, quasi continue à gauche, telle que :

(1.b) $\quad \Delta X_s = x_s 1_{(\Delta X_s \neq 0)}$, avec x processus prévisible localement borné ;

(1.c) il existe ε et A tels que : $0 < \varepsilon \le 1 + x_s \le A < \infty$

D'après (1.b), X est localement de carré intégrable, et on a :

$$(1.d) \qquad \mathcal{E}(X)_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\log(1+x_s)}{x_s}\, dX_s + \int_0^t \frac{d\langle X\rangle_s}{x_s^2} \left[\log(1+x_s) - x_s\right]\right.$$

<u>Démonstration</u> : D'après (1.c), on peut écrire :

$$\prod_{s\le t} (1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s} = \exp \sum_{s \le t} \left\{ \log(1+\Delta X_s) - \Delta X_s \right\},$$

et on a, d'après (1.b) :

$$\sum_{s\le t} \left\{ \log(1+\Delta X_s) - \Delta X_s \right\} = \int_0^t \frac{(\log(1+x_s) - x_s)}{x_s}\, dX_s + \int_0^t \frac{d\langle X\rangle_s}{x_s^2}\left[\log(1+x_s) - x_s\right]$$

d'où l'on déduit la formule (1.d) □

Nous nous proposons de faire disparaître l'intégrale stochastique de la formule (1.d), tout au moins dans le cas où : $X_t = \int_0^t f(s)\, d\mu_s$, avec f fonction déterministe.

On note alors $\mathcal{E}^f(\mu)$ pour $\mathcal{E}(X)$, et on a, d'après la formule (1.d) :

$$(1.e)\qquad \mathcal{E}^f(\mu)_t = \exp\Big(-\int_0^t \frac{\log(1-f(s)\mu_{s-})}{\mu_{s-}}\,d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^2}\big[\log(1-f(s)\mu_s) + f(s)\mu_s\big]\Big)$$

2. Dans de nombreux cas, la formule (1.e) peut être écrite sous une forme simplifiée, comme le montre la

Proposition : Soit $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, fonction de classe C^1 telle que : $\sup_{s\le t} |f(s)|\sqrt{t} < 1$. On a alors :

$$(2.a)\qquad \mathcal{E}^f(\mu)_t = \frac{1}{(1-f(t)\mu_t)}\exp\Big(-\int_0^t \frac{ds}{(1-f(s)\mu_s)}\big[\tfrac{1}{2}f^2(s) - f'(s)\mu_s\big]\Big)$$

Démonstration : Si $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $C^{2,1}$, on a la formule d'Ito :

$$g(\mu_t,t) = g(0,0) + \int_0^t \frac{g(\mu_{s-},s)-g(0,s)}{\mu_{s-}}\,d\mu_s + \int_0^t ds\Big[g'_t(\mu_s,s) - \frac{1}{2}\Big\{\frac{g(\mu_s,s)-g(0,s)-g'_x(\mu_s,s)\mu_s}{\mu_s^2}\Big\}\Big]$$

En appliquant cette formule à $g(x,t) = -\log(1-f(t)x)$, il vient :

$$-\log(1-f(t)\mu_t) = -\int_0^t \frac{\log(1-f(s)\mu_{s-})}{\mu_{s-}}\,d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^2}\log(1-f(s)\mu_s) + \int_0^t \frac{ds\,\mu_s f'(s)}{1-f(s)\mu_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds\, f(s)}{\mu_s(1-f(s)\mu_s)}.$$

La formule (2.a) découle alors de (1.e) $\square$

Cas particulier : $f(t)\equiv\alpha$; $\displaystyle \mathcal{E}^\alpha(\mu)_t = \frac{1}{(1-\alpha\mu_t)}\exp\Big(-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{1-\alpha\mu_s}\Big)$

Si l'on remplace α par $(-i\alpha)$, la restriction : $|\alpha|\sqrt{t}<1$ n'est plus nécessaire et on a alors, pour tout t :

$$\mathcal{E}^{-i\alpha}(\mu)_t = \frac{1}{(1+i\alpha\mu_t)} \exp \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{(1+i\alpha\mu_s)}$$

3. Revenons maintenant au cas où α est réel. Suivant Meyer (Sém. $\underline{X}$, p. 318), on pose :

$$\mathcal{E}^{\alpha}(\mu)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Pi_n(t).$$

Les martingales Π_n peuvent être décrites au moyen de la :

<u>Proposition</u> : Il existe une suite $(\alpha_t^{(n)})$ de processus $(\mathcal{G}_t)$ adaptés, absolument continus tels que :

(i) $\quad \Pi_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_t^j \alpha_t^{(n-j)}$

(ii) $\quad \alpha_t^{(n+1)} = -\int_0^t d\alpha_s^{(n)} \mu_s - \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \left(d\alpha_s^{(n-j)}\mu_s^{j+1} + \frac{j}{2}\, ds\, \mu_s^{j-1}\alpha_s^{(n-j)}\right)$

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer, par récurrence, l'existence d'une famille de processus continus, à variation bornée, $(\mathcal{G}_t)$ adaptés $(A_t^{j,n};\ j\leq n)$ tels que :

(3.a) $\quad \Pi_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_t^j A_t^{j,n}$

Supposons la relation (3.a) satisfaite au rang n, et montrons-la au rang $(n+1)$. On a :

(3.b) $\quad \Pi_{n+1}(t) \equiv \int_0^t d\mu_s\, \Pi_n(s-) = \int_0^t d\mu_s \left(\sum_{j=0}^{n} \mu_{s-}^j A_s^{j,n}\right)$

On a, à l'aide de la formule d'intégration par parties :

$$\mu_t^{j+1} A_t^{j,n} = \int_0^t dA_s^{j,n} \mu_s^{j+1} + \int_0^t d(\mu_s^{j+1}) A_s^{j,n} ,$$

et, d'autre part :

$$d\mu_s^{j+1} = d\mu_s \, \mu_{s-}^{j} + \frac{j}{2} \, ds \, \mu_s^{j-1} \qquad (\text{si } j=0, \ \mu_s^{-1} \equiv 0 \ \text{par convention})$$

En reportant ces deux formules en (3.b), il vient :

$$\Pi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_t^{j+1} A_t^{j,n} - \sum_{j=0}^{n} \int_0^t \left(dA_s^{j,n} \mu_s^{j+1} + \frac{j}{2} \, ds \, \mu_s^{j-1} A_s^{j,n} \right)$$

L'identité (3.a) est donc satisfaite pour Π_{n+1}, avec :

$$A_t^{j,n+1} = A_t^{j-1,n} \qquad (1 \le j \le n+1)$$

$$A_t^{0,n+1} = - \sum_{j=0}^{n} \int_0^t \left(dA_s^{j,n} \mu_s^{j+1} + \frac{j}{2} \, ds \, \mu_s^{j-1} A_s^{j,n} \right)$$

Ainsi si l'on pose : $\alpha_t^{(k)} = A_t^{0,k}$, il vient, d'après ce qui précède :

$$A_t^{j,n} = \alpha_t^{(n-j)} , \quad \text{et}$$

$$\alpha_t^{(n+1)} = - \sum_{j=0}^{n} \int_0^t \left(d\alpha_s^{(n-j)} \mu_s^{j+1} + \frac{j}{2} \, ds \, \mu_s^{j-1} \alpha_s^{(n-j)} \right) .$$

La proposition est complètement démontrée $\square$

Projections de quelques martingales browniennes remarquables.

On pose : $p_u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2u}\right)$,

et $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty d\xi \, \xi \, e^{-\xi^2/2} \, e^{a\xi}$. Remarquons que $F(a) = G'(a)$

où $G(a) = \displaystyle\int_0^\infty d\xi \, e^{-\xi^2/2} e^{a\xi}$

$= e^{a^2/2} \psi(a)$, avec : $\psi(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^a d\xi \, e^{-\xi^2/2}$.

D'où : $\underline{F(a) = 1 + a e^{a^2/2} \psi(a)}$.

On peut maintenant énoncer la

Proposition : Soit $s > 0$, et $x \in \mathbb{R}$.

1) Le processus $\left(p_{s-u}(B_u - x),\ u < s\right)$ est une $(\mathcal{F}_u)$ martingale ;

2) Sa projection est :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{s-t}}{(s-g_t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2(s-t)}\right) F\left(\frac{\mu_t x}{\sqrt{(s-t)(s-g_t)}}\right)$$

En particulier, on obtient, en prenant $x = 0$, que :

$$\left(\frac{\sqrt{s-t}}{s-g_t}\ ;\ t < s\right) \text{ est une } (\mathcal{G}_t) \text{ martingale.}$$

Démonstration : • 1) découle de ce que $\left(p_{s-u}(y-x)\ ;\ u<s, y \in \mathbb{R}\right)$ est harmonique dans l'espace-temps ;

• La projection de cette $(\mathcal{F}_u)$ martingale est :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \int_0^\infty d\xi \; \xi \, e^{-\xi^2/2} \exp - \frac{1}{2(s-t)} (\mu_t \xi - x)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(s-t)}\right) \int_0^\infty d\xi \; \xi \, e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\mu_t^2}{(s-t)}\right]\xi^2} \, e^{\mu_t \frac{x\xi}{s-t}}$$

Si l'on pose $n = \left(1 + \frac{\mu_t^2}{s-t}\right)^{1/2}$ et $\eta = n.\xi$, on obtient, après avoir effectué ce changement de variable :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{s-t}}{(s-g_t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2(s-t)}\right) F\left(\frac{\mu_t x}{\sqrt{(s-t)(s-g_t)}}\right)$$