Sur l'existence d'une version continue de $(\Gamma(\lambda), \lambda>0)$.

1. Préliminaires.

λ varie dans l'intervalle $[a,b]$, avec $0<a<b<\infty$.
On sait déjà qu'il existe une version mesurable de $(\Gamma(\lambda), \lambda>0)$, car on peut prendre :

$$\Gamma(\lambda) = \left(\overline{\lim_n} \int_0^n ds\, g(s) \cos(\lambda B_s)\right) + i \left(\overline{\lim_n} \int_0^n ds\, g(s) \sin(\lambda B_s)\right)$$

(1.1) L'étude qui suit repose sur le lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey que l'on appliquera sous la forme suivante :

$p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ désigne toujours une fonction continue, strictement croissante, telle que $p(0)=0$.

Alors, si l'on note :

$$\mathcal{U}_p = \iint_{[a,b]^2} \left(\frac{|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|}{p(|\lambda-\mu|)}\right)^2 d\lambda\, d\mu ,$$

on a :

(1.a) $$|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)| \leq 16\, \mathcal{U}_p^{1/2} \int_0^{|\lambda-\mu|} \frac{dp(u)}{u}$$

Dans la suite, nous travaillerons uniquement avec des fonctions p qui satisfont les hypothèses ci-dessus, ainsi que les deux conditions supplémentaires :

(1.b) $$\int_0 \frac{dp(u)}{u} < \infty$$

(1.c) $E[\mathcal{U}_p] < \infty$, ce qui implique a fortiori : $\mathcal{U}_p < \infty$ P p.s.

(1.2) De façon à obtenir un critère sur p qui implique la propriété (1.c), nous utiliserons la généralisation suivante de l'inégalité de Hardy dans L^2

Lemme 1 : A toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, et tout $k > 0$, on associe :

$$G_{(k)}(s) = \int_s^\infty du\, g(u)\, e^{-k(u-s)}$$

Soit $\Pi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, croissante ; on a alors :

$$(1.d) \quad \left(\int_0^\infty ds\, \Pi(s)\, G^2_{(k)}(s)\right)^{1/2} \leq \frac{1}{k}\left(\int_0^\infty du\, \Pi(u)\, g^2(u)\right)^{1/2}.$$

Démonstration : a) Il suffit de démontrer le lemme pour $g \geq 0$, bornée, à support compact, auquel cas $G_{(k)}$ est également bornée et à support compact, ce qui implique : $\int_0^\infty ds\, \Pi(s)\, G^2_{(k)}(s) < \infty$.

b) On a :

$$\int_0^\infty ds\, \Pi(s)\, G^2_{(k)}(s)$$

$$= \int_0^\infty ds\, \Pi(s)\, 2\int_s^\infty du\, g(u)\, e^{-k(u-s)} \int_u^\infty dv\, g(v)\, e^{-k(v-s)}$$

$$= 2\int_0^\infty du\, g(u)\, e^{-ku} \int_u^\infty dv\, g(v)\, e^{-kv} \int_0^u ds\, \Pi(s)\, e^{2ks}$$

L'intégrale en (ds) est majorée par $\Pi(u)\, e^{2ku}/2k$. On a donc :

$$\int_0^\infty ds\, \Pi(s)\, G^2_{(k)}(s) \leq \frac{1}{k}\int_0^\infty du\, g(u)\, G_{(k)}(u)\, \Pi(u)$$

$$\leq \frac{1}{k}\left(\int_0^\infty du\, g^2(u)\, \Pi(u)\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty du\, G^2_{(k)}(u)\, \Pi(u)\right)^{1/2},$$

d'où l'on déduit l'inégalité (1.d), grâce à la remarque a) $\square$

2. Quelques résultats généraux.

A une fonction $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, strictement croissante, telle que $p(0)=0$, on associe la fonction croissante :

$$(2.a) \qquad \Pi(s) = \int_0^c \frac{dx}{p^2(x)} \left(1 - e^{-\frac{x^2 s}{2}}\right) \quad , \quad \text{où } c = b-a.$$

La fonction Π est à valeurs finies si, et seulement si :

$$(2.b) \qquad \int_0 \frac{dx\, x^2}{p^2(x)} < \infty$$

<u>Remarque</u> : Dans la suite, les contraintes :

$$(1.b) \quad \int_0 \frac{dp(u)}{u} < \infty \qquad \text{et} \qquad (2.b) \quad \int_0 \frac{du\, u^2}{p^2(u)} < \infty$$

seront les seules que nous imposerons à la fonction p.

La fonction $p_m(u) = u^m$ satisfait (1.b) et (2.b) si, et seulement si :

$$1 < m < \frac{3}{2}.$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer la :

<u>Proposition</u> : Soit $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonction continue, strictement croissante, telle que $p(0) = 0$. On utilise les notations U_p et Π définies précédemment. On a alors :

$$E[U_p] \leq 16 \left(\frac{b-a}{a^2}\right) \int_0^\infty ds\, g^2(s)\, \Pi(s).$$

<u>Démonstration</u> : On peut bien sûr supposer que la fonction Π est à valeurs finies, sinon il n'y a rien à démontrer.

Par définition de $\mathcal{U}_p$, on a :

$$E[\mathcal{U}_p] = \iint_{[a,b]^2} \frac{d\lambda\, d\mu}{p^2(|\lambda-\mu|)}\; E[|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2].$$

Or, on a l'identité :

$$(2.c)\quad E[|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2] = 2\int_0^\infty ds\, g(s)\left(1-e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2 s}{2}}\right)\left(G_\lambda(s)+G_\mu(s)\right),$$

où l'on a posé : $G_\lambda(s) = \int_s^\infty dt\, g(t)\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} = G_{\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)}(s)$,

avec les notations du lemme ci-dessus.

Quitte à remplacer en (2.c) g par $|g|$ et le signe $=$ par $\leq$, on peut supposer la fonction g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On a alors :

$$G_\lambda(s) \leq G_a(s), \quad \text{pour } \lambda \in [a,b].$$

On en déduit :

$$E[\mathcal{U}_p] \leq 4\int_0^\infty ds\, g(s)\, G_a(s) \iint_{[a,b]^2} \frac{d\lambda\, d\mu}{p^2(|\lambda-\mu|)}\left(1-e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2}s}\right)$$

$$\leq 8(b-a)\int_0^\infty ds\, g(s)\, G_a(s)\, \Pi(s)$$

par définition de la fonction Π.

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le lemme 1.

Il vient :

$$\int_0^\infty ds\, g(s)\, G_a(s)\, \Pi(s) \leq \left(\int_0^\infty ds\, g^2(s)\, \Pi(s)\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty ds\, G_a^2(s)\, \Pi(s)\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{2}{a^2}\int_0^\infty ds\, g^2(s)\, \Pi(s).$$

L'inégalité annoncée en découle $\square$

Dans la suite, on s'interessera de façon naturelle aux fonctions $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_0^\infty ds\, g^2(s)\, \Pi(s) < \infty .$$

Il est donc important d'étudier le mode de croissance de $\Pi(s)$, lorsque $s \longrightarrow \infty$.
Deux estimations de ce mode de croissance sont présentées dans le

Lemme 2 :

i) D'une part, pour tout $a > 0$, on a :

$$(2.d) \quad \underline{\lim}_{(s \to \infty)} \frac{\Pi(s)}{\sqrt{s}} \left(\int_0^{a/\sqrt{s}} \frac{dp(u)}{u} \right)^2 > 0$$

ii) D'autre part, si on pose $x = (2/s)^{1/2}$, et $F(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x dy \frac{y^2}{p^2(y)}$,

on a : $(2.e)$ $\Pi(s) = O\left(\int_x^c \frac{dy}{y} F(y) \right) \quad (s \to \infty).$

Exemple : Si $p(u) = p_m(u) = u^m \quad (1 < m < 3/2)$,

on a : $$\Pi(s) \sim C\, s^{m-1/2} \quad (s \to \infty),$$

ainsi que :

$$\sqrt{s} \Big/ \left(\int_0^{a/\sqrt{s}} \frac{dp(u)}{u} \right)^{1/2} \sim C'\, s^{m-1/2} \quad (s \to \infty)$$

et

$$\int_{(2/s)^{1/2}}^c \frac{dy}{y} F(y) \sim C''\, s^{m-1/2} \quad (s \to \infty)$$

Les estimations présentées dans le Lemme semblent donc interessantes.

3. Applications.

Pour $g(s) = \frac{1}{s^\alpha} 1_{(s \geq 1)}$, avec $\alpha > 1$, on a :

$$(3.a) \qquad \int_0^\infty ds\, g^2(s)\, \pi(s) < \infty$$

pour $\pi(s) = s^{2\alpha - 1} \frac{1}{(\log s)^k}$, avec $k > 1$.

Pour que π satisfasse les estimations obtenues dans le Lemme 2 ci-dessus, il est nécessaire que : $2\alpha - 1 \geq 1/2$, d'où : $\alpha \geq 3/4$.

Pour $\alpha > 3/4$, on obtient finalement :

$$|\Gamma(\lambda) - \Gamma(\mu)| \leq C_\omega\, \varphi(|\lambda - \mu|), \text{ où } \varphi(x) = x^{\frac{4\alpha - 3}{2}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^\beta, \text{ et } \beta > \frac{1}{2}$$

Remarque : Il serait intéressant de déterminer les fonctions p pour lesquelles on a :

$$\frac{\pi(s)}{\sqrt{s}} \underset{(s \to \infty)}{\sim} C \left(\int_0^{a/\sqrt{s}} \frac{dp(u)}{u} \right)^{-2}$$

Ceci permet alors d'exprimer le module de continuité de Γ directement en fonction de la fonction π qui figure en (3.a).

Démonstration du Lemme 2 :

a) On a, à l'évidence : $p(y) \leq y \int_0^y \frac{dp(u)}{u}$.

D'où :

$$\frac{\Pi(s)}{\sqrt{s}} \geqslant \int_0^{c\sqrt{s}} \frac{dy}{y^2} \left(1-e^{-y^2/2}\right) \frac{1}{\left(\int_0^{y/\sqrt{s}} \frac{dp(u)}{u}\right)^2}$$

$$\geqslant \int_0^{a} \frac{dy}{y^2} \left(1-e^{-y^2/2}\right) \frac{1}{\left(\int_0^{a/\sqrt{s}} \frac{dp(u)}{u}\right)^2}, \text{ pour } a < c\sqrt{s}, \text{ d'où } (2.d).$$

b) Inversement, on a :

$$\Pi(s) = \int_0^c \frac{dy}{p^2(y)} \left(1-e^{-\frac{y^2 s}{2}}\right) \leqslant \int_0^c \frac{dy}{p^2(y)} \left(\frac{y^2 s}{2} \wedge 1\right)$$

$$\leqslant \frac{s}{2} \int_0^{(2/s)^{1/2}} \frac{dy\, y^2}{p^2(y)} + \int_{(2/s)^{1/2}}^{c} \frac{dy}{p^2(y)}.$$

Posons : $x = (2/s)^{1/2}$, et $f(y) = \frac{y^2}{p^2(y)}$. On a alors :

$$\Pi(s) \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^x dy\, f(y) + \int_x^c \frac{dy}{y^2} f(y) = \frac{1}{c^2} \int_0^c dy\, f(y) + 2 \int_x^c \frac{dy}{y^3} \int_0^y dh\, f(h)$$

d'où l'on déduit l'estimation $(2.e)$.

4. Remarques complémentaires.

(4.1) En fait, on comprend mieux le résultat de la proposition après avoir évalué plus directement : $E\left(|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2\right)$, pour $\lambda, \mu \in [a,b]$.
On a, d'après la formule (2.c) :

$$E\left[\,|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2\right]$$

$$\leq 4\int_0^\infty ds\, g(s)\, h(s)\, G_a(s) \quad , \text{ où l'on a posé : } h(s) = 1-e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2}s}$$

$$\leq 4\left(\int_0^\infty ds\, g^2(s)\, h(s)\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty ds\, G_a^2(s)\, h(s)\right)^{1/2} \quad , \text{ d'après Cauchy-Schwarz.}$$

$$\leq \frac{8}{a^2}\int_0^\infty ds\, g^2(s)\, h(s) \quad , \text{ d'après le lemme 1.}$$

On a donc finalement l'inégalité :

$$(4.a) \qquad E\left[\,|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2\right] \leq \frac{8}{a^2}\int_0^\infty ds\, g^2(s)\left(1-e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2}s}\right).$$

On en déduit, pour $g(s) = \frac{1}{s^\alpha} 1(s \geq 1)$, avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:

$$E\left[\,|\Gamma(\lambda)-\Gamma(\mu)|^2\right] \leq C\int_1^\infty \frac{ds}{s^{2\alpha}}\left(1-e^{-ks}\right) \quad , \text{ en posant } k = \frac{(\lambda-\mu)^2}{2}.$$

$$\leq C\, k^{2\alpha-1}\int_0^\infty \frac{du}{u^{2\alpha}}\left(1-e^{-u}\right)$$

$$\leq C_\alpha\, |\lambda-\mu|^{4\alpha-2},$$

et on peut donc appliquer le critère de Kolmogorov pour $4\alpha-2 > 1$, c'est à dire : $\alpha > 3/4$.