Sur la loi du maximum d'une martingale remarquable.

Marc Yor, le 8 Mai 1998
+ le 9 Mai 1998

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvt. brownien réel, issu de 0, et $\nu \in \mathbb{R}$ (au début de la discussion, je prendrai certainement $\nu \geq 0$).

Je me propose d'expliciter le mieux possible la loi de :

(1) $$\Sigma_t^{(\nu)} \overset{\text{def}}{=} \sup_{s \leq t} \left(M_s^{(\nu)} \right), \quad \text{où : } M_s^{(\nu)} = \int_0^s dB_u \exp(B_u + \nu u).$$

Bien sûr, on peut écrire cette martingale sous forme : Représentation de Dubins-Schwarz :

(2) $$M_t^{(\nu)} = \beta_{A_t^{(\nu)}}, \quad \text{où } A_t^{(\nu)} = \int_0^t ds \exp 2(B_s + \nu s)$$

Remarquons que β est le mouvement brownien qui intervient dans la décomposition du processus de Bessel $(R_u^{(\nu)}, u \geq 0)$, lequel figure dans la représentation de Lamperti :

(3) $$\exp(B_t + \nu t) = R^{(\nu)}_{A_t^{(\nu)}}, \quad t \geq 0 ;$$

et rappelons que l'on a :

(4). $$R_t^{(\nu)} = 1 + \beta_t + \frac{2\nu+1}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^{(\nu)}} \qquad \left(c_\nu \equiv \frac{2\nu+1}{2} \right).$$

On utilisera également de façon importante l'inverse du processus $(A_t^{(\nu)}, t \geq 0)$, qui est « l'horloge » des processus de Bessel :

(5) $$C_u^{(\nu)} = \int_0^u \frac{ds}{(R_s^{(\nu)})^2} \qquad \left(\equiv \inf\{t : A_t^{(\nu)} > u\} \right).$$

Notons maintenant: $\beta^*_u = \sup_{s \le u} \beta_s$, et remarquons immédiatement, à l'aide de (1), que l'on a : $\Sigma^{(\nu)}_t = \beta^*_{A^{(\nu)}_t}$.

On a donc:

$$P(\Sigma^{(\nu)}_t \le a) = P(\beta^*_{A^{(\nu)}_t} \le a) = P(A^{(\nu)}_t \le T^*_a),$$

et, finalement:

(6) $$P(\Sigma^{(\nu)}_t \le a) = P(t < C^{(\nu)}_{T^*_a}),$$

ici ($\nu < 0$): $C^{(\nu)}_{T_0} = \infty$

où $T^*_a = \inf\{u : \beta_u > a\}$

$$\equiv \inf\left\{u : R^{(\nu)}_u - c_\nu \int_0^u \frac{ds}{R^{(\nu)}_s} > a+1\right\} \equiv T_{a+1,\, c_\nu}.$$

avec les notations qui suivent.

Grâce à (6), le problème initial a donc été ramené à celui de la loi de $C^{(\nu)}_{T^*_a}$. Nous allons donc essayer d'expliciter la transformée de Laplace de $C^{(\nu)}_{T^*_a}$.

Récrivons (6) sous la forme:

(6') $$P(\Sigma^{(\nu)}_t \geq a) = P(C^{(\nu)}_{T^*_a} \le t).$$

On a donc:

$$\lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t} P(\Sigma^{(\nu)}_t \geq \cancel{a}) = \lambda E\left[\int_{C^{(\nu)}_{T^*_a}}^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, \cancel{]}\right.$$

$f(A^{(\nu)}_t)$. $f(A^{(\nu)}_t)$.

(7) $$= E\left[e^{-\lambda C^{(\nu)}_{T^*_a}}\right].$$

| Cela sera très intéressant...

à ce point, ou bien on suit fait,

ou bien on fait les deux calculs. Appli

Nous allons maintenant utiliser les relations d'absolue continuité entre les différents processus de Bessel, c'est à dire :

$$(8) \quad P_r^{(\nu)}\Big|_{\mathcal{R}_T \cap (T<T_0)} = \left(\frac{R_T}{r}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2} C_T\right) \cdot P_r^{(0)}\Big|_{\mathcal{R}_T}$$

(j'ai supposé ici que T est un t.a. fini aussi bien $P_r^{(0)}$ que $P_r^{(\nu)}$ p.s.).

Posons maintenant : $\lambda = \frac{\theta^2}{2}$. On a donc (toujours sous la même hypothèse de finitude) :

$$E_r^{(\nu)}\left[\exp\left(-\frac{\theta^2}{2} C_T\right)\right] = E_r^{(0)}\left[\left(\frac{R_T}{r}\right)^{\nu} \underbrace{\exp\left(-\frac{\nu^2}{2} C_T\right)}_{\exp\left(-\frac{\theta^2}{2} C_T\right)}\right].$$

(9) | ici, si l'on prend $\nu < 0$, il faut $C_{T \wedge T_0}$, mais OK, car $C_{T_0} = \infty$ |

$$= E_r^{(\mu)}\left[\left(\frac{R_T}{r}\right)^{\nu-\mu}\right] \equiv E_r^{(\mu)}\left[\left(\frac{r}{R_T}\right)^{\mu-\nu}\right]$$

où $\mu = \sqrt{\nu^2 + \theta^2}$.

Le problème est donc ramené à celui du calcul des moments négatifs, sous $P_r^{(\mu)}$ de $R_{T_{\alpha,\beta}}$, où

$$T_{\alpha,\beta} = \inf\left\{u : R_u > \alpha + \beta \int_0^u \frac{ds}{R_s}\right\}.$$

On peut bien sûr, dans la suite, avoir $\beta < 0$.

Nous allons voir comment, à son tour, ce problème peut être ramené à celui de l'étude des temps d'atteinte (et position) de frontières paraboliques pour les processus de Bessel, problème déjà étudié en [1], en suivant une méthode due à L. Shepp [2].

Tout d'abord, nous utiliserons le résultat (assez connu) suivant, lequel est intimement lié à la représentation de Lamperti (3).

<u>Lemme</u> (Voir [3], Chap. XI, Prop. (1.11))

Si $(R^{(\mu)}_t, t \geq 0)$ désigne le processus de Bessel d'indice μ, issu de r, on a :

$$\left(R^{(\mu)}_t\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\hat{R}^{(2\mu)}\left(\int_0^t \frac{ds}{R^{(\mu)}_s}\right),$$

pour un second processus de Bessel $R^{(2\mu)}$, issu de $(2\sqrt{r})$.

~~Alors~~ En conséquence, on a le :

<u>Corollaire.</u> (10) $$R^{(\mu)}_{T_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{4}\left(R^{(2\mu)}_{\hat{T}_{\alpha,\beta}}\right)^2,$$

où $$\hat{T}_{\alpha,\beta} \equiv \inf\left\{u : \frac{1}{4}\hat{R}_u^2 = \alpha \pm \beta u\right\}$$

$$= \inf\left\{u : \hat{R}_u = 2\sqrt{\alpha \pm \beta u}\right\},$$

$(\hat{R}_u, u \geq 0)$ désignant ici le processus de Bessel d'indice (2μ), issu de $(2\sqrt{r})$.

Il me reste maintenant à faire une dernière réduction, qui consiste à nous ramener à la situation $\alpha = \beta$. Pour cela, posons : $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, et écrivons : $\hat{R}_{\gamma v} \equiv \sqrt{\gamma}\,\tilde{R}_v$, où $\tilde{R}$ est issu de $\left(\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{\gamma}}\right)$.

Il n'est pas difficile de montrer ensuite :

(11) $$\hat{R}_{\hat{T}_{\alpha,\beta}} \equiv \sqrt{\gamma}\,\tilde{R}_{\tilde{T}_c^{(-)}}, \quad \text{où } c = 2\sqrt{\beta},$$

et $\tilde{T}_c = \inf\left\{ t : \tilde{R}_t = c\sqrt{1+t} \right\}$

(C'est la famille des temps qui a été étudiée en [1]).

On obtient donc finalement la ~~..~~ variante suivante de (10) :

$$(10') \qquad R^{(\mu)}_{T_{\alpha,\beta}} = \left(\frac{\alpha}{4|\beta|}\right)\left(\tilde{R}^{(2\mu)}_{\tilde{T}_{\frac{(-)}{2\sqrt{|\beta|}}}}\right)^2 ,$$

où $\tilde{R}$ est issu de $\sqrt{2r}\sqrt{\frac{|\beta|}{\alpha}}$.

Il reste maintenant à appliquer la formule (2.b.1), p. 102, de [1], sous la forme suivante :

<u>Proposition</u> :

$$E_u^{\eta}\left[\frac{1}{\left(R_{\tilde{T}_c^{(-)}}\right)^{2m}}\right] = \frac{1}{c^{2m}} E_u^{\eta}\left[\frac{1}{\left(1+\tilde{T}_c^{(-)}\right)^{\cancel{2}m}}\right]$$

attention !

$$(11) \qquad = \frac{1}{c^{2m}} \frac{\Lambda\left(\cancel{2}m, \eta+1, -\frac{u^2}{2}\right)}{\Lambda\left(\cancel{2}m, \eta+1, -\frac{c^2}{2}\right)}.$$

où : $\Lambda = M$, si $u < c$; $\Lambda = U$, si $u > c$

(Notations de Abramowitz–Stegun).

On en déduit maintenant le

<u>Corollaire</u> : On a l'égalité :

$$(12) \qquad E_r^{(\mu)}\left[\frac{1}{\left(R_{T_{\alpha,\beta}}\right)^m}\right] = \left(\frac{4|\beta|}{\alpha}\right)^m \frac{\Lambda\left(m, 2\mu+1, 2r\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Lambda\left(m, 2\mu+1, 2\beta\right)}$$

où : $\Lambda = M$, si $r < \alpha$; $\Lambda = U$, si $r > \alpha$.

Démonstration : D'après (10'), on a :

$$E_r^{(\mu)}\left[\frac{1}{(R_{T_{\alpha,\beta}})^m}\right] = E^{(2\mu)}_{2\sqrt{r\frac{\beta}{\alpha}}}\left[\frac{1}{\left(\left(\frac{\alpha}{4\beta}\right)(R_{\tilde{T}_{2\sqrt{\beta}}})^2\right)^m}\right]$$

$$= \left(\frac{4\beta}{\alpha}\right)^m E^{(2\mu)}_{2\sqrt{r\frac{\beta}{\alpha}}}\left[\frac{1}{R^{2m}_{\tilde{T}_{2\sqrt{\beta}}}}\right].$$

J'applique finalement (11) avec :

$c = 2\sqrt{\beta}$, $u = 2\sqrt{r\frac{\beta}{\alpha}}$, $\eta = 2\mu$. $\square$