Février 1993

Sur la loi du supremum des temps locaux d'un pont de Bessel.

Shi Zhan (1) et Marc Yor (2)

(1) Laboratoire de Statistiques - Université Pierre et Marie Curie -

(2) Laboratoire de Probabilités - Université Pierre et Marie Curie - (....) -
etc...

1. Introduction et premiers résultats.

Pour des raisons très différentes, plusieurs auteurs se sont intéressés, au cours des dix dernières années, à la loi du supremum des temps locaux :

- du mouvement brownien (A. Borodin [3] ; N. Eisenbaum [4])
- du pont brownien (Shorack et Wellner [10], p. 400 ; D. Khoshnevisan [8])
- de la valeur absolue du pont brownien (L. Erdös [5])

Pour compléter cette liste, il nous a semblé naturel de nous intéresser également au supremum des temps locaux du méandre brownien, ainsi que du pont de Bessel pour n'importe quelle dimension $d > 0$, et en particulier pour la dimension $d = 3$.

Au début de notre étude de ces questions, nous avons remarqué que certaines transformations trajectorielles des temps locaux des ~~processus~~ ponts de Bessel (au moins pour certaines dimensions) donnaient facilement la réponse à ces questions.

Ainsi, si on note $(p(t), t \leq 1)$ le pont brownien standard, $(q(t) = |p(t)|, t \leq 1)$ sa valeur absolue, et $(e(t), t \leq 1)$ le pont de Bessel de dimension 3, on connait bien les résultats suivants :

(1) (Biane-Yor [2]). Notons $(\ell^a_q ; a \geq 0)$ la famille des temps locaux de q, et $k(t) = \sup\{y \geq 0 ; \int_y^\infty \ell^x_q \, dx > t\}$;

alors, le processus $\left(\frac{1}{2}\ell^{k(t)}_q ; t \leq 1\right)$* est un méandre brownien ;

(2) (Jeulin [6]). Notons $(\ell^a_e ; a \geq 0)$ la famille des temps locaux de e, et $J(x) = \int_0^x dy \, \ell^y_e = \int_0^1 dt \, 1_{(e(t) \leq x)}$

Alors, le processus $\left(\frac{1}{2}\ell_e^{J^{-1}(x)} ; x \leq 1\right)$ a même loi que e.

(3) (Vervaat [11]) Si ρ_p désigne l'unique instant auquel p atteint son minimum, alors : $\{e(t) \stackrel{def}{=} p((\rho_p + t)[\text{mod } 1]) - p(\rho_p) ; t \leq 1\}$ est un pont de Bessel de dimension 3. De plus, ρ_p est uniformément distribuée sur $[0,1]$, et est indépendante de $(e(t) ; t \leq 1)$.

(4) (D. Kennedy [7]) Si $(m(t) ; t \leq 1)$ est un méandre brownien, on a :

$$\sup_{u \leq 1} m(u) \stackrel{(loi)}{=} 2 \sup_{u \leq 1} q(u).$$

* Attention : $\left(\frac{1}{2}\ell^{k(t)} ; t \leq 1\right)$.

Une application trajectorielle de cette identité en loi a été donnée par Biane-Yor ([2] ;).

Appliquons maintenant ces résultats :

- tout d'abord, en combinant (1) et (4), on obtient les identités en loi suivantes :

$$(5) \qquad \sup_{a \geq 0} \ell_q^a \overset{(\text{loi})}{=} 2 \sup_{u \leq 1} m(u) \overset{(\text{loi})}{=} 4 \sup_{u \leq 1} q(u)$$

Ainsi, au facteur 4 près, la loi de : $\left(\sup_{a \geq 0} \ell_q^a\right)$ est la célèbre loi de Kolmogorov-Smirnov ;

- nous allons maintenant combiner (2) et (3) pour identifier les lois de $\sup_{a \geq 0} \ell_e^a$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} \ell_p^x$.

Remarquons, pour commencer, que l'on déduit de (2) le résultat :

$$(6) \qquad \sup_{a \geq 0} \ell_e^a \overset{(\text{loi})}{=} 2 \sup_{t \leq 1} e(t)$$

D'autre part, on déduit facilement de (3) l'identité en loi suivante :

$$\left(\ell_e^a ; a \geq 0\right) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\ell_p^{a+i_p} ; a \geq 0\right),$$

ce qui implique, en particulier :

$$(7) \qquad \sup_{a \geq 0} \ell_e^a \overset{(\text{loi})}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} \ell_p^x$$

Enfin, une conséquence immédiate de l'identité de Vervaat (c'est d'ailleurs ce résultat qui a motivé le travail de Vervaat) est :

$$(8) \qquad \sup_{t \leq 1} e(t) \overset{(\text{loi})}{=} s_p - i_p ,$$

où l'on a noté : $\quad s_p = \sup_{t \le 1} p(t)$, et $i_p = \inf_{t \le 1} p(t)$.

En rapprochant les identités en loi (6), (7) et (8), on a donc obtenu :

$$(9) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \ell_p^x \overset{(\text{loi})}{=} \sup_{a \ge 0} \ell_e^a \overset{(\text{loi})}{=} 2 \sup_{t \le 1} e(t) \overset{(\text{loi})}{=} 2(s_p - i_p).$$

Dans les paragraphes 2 et 3 ci-dessous, nous utilisons de façon plus systématique les identités en loi (1), (2), (3) et (4), pour en déduire des identités en loi multidimensionnelles qui renforcent considérablement (5) et (9).

Dans le paragraphe 4, nous utilisons l'identité en loi suivante entre un pont de Bessel de dimension $d > 0$, et deux processus de Bessel indépendants mis dos à dos pour étendre à toute dimension d les résultats obtenus ci-dessus pour les dimensions $d = 1$ et $d = 3$.

Considérons $(R_u, u \le T \equiv T_1^{(d)})$ et $(\hat{R}_u ; u \le \hat{T} = \hat{T}_1^{(d)})$ deux processus de Bessel de dimension d, indépendants, issus de 0, jusqu'en leurs premiers temps d'atteinte respectifs de 1. Définissons ensuite le processus $(\tilde{R}_t ; t \le T + \hat{T})$ par :

$$\tilde{R}_t = R_t, \text{ si } t \le T, \quad \text{et} \quad \tilde{R}_t = \hat{R}_{T + \hat{T} - t}, \text{ si } T \le t \le T + \hat{T}.$$

On a le

Théorème : Les lois du processus $\left(\tilde{r}(t) = (T + \hat{T})^{-1/2} \tilde{R}_{t(T + \hat{T})} ; t \le 1\right)$ et du pont de Bessel $(r(t), t \le 1)$ de dimension d sont liées par la relation : pour toute fonctionnelle mesurable $F : C([0,1]; \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$E\left[F(r(t); t \le 1)\right] = c_d \, E\left[F(\tilde{r}(t); t \le 1)(\tilde{M})^{2-d}\right],$$

où $\quad c_d = 2^{\frac{d}{2} - 1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$, et $\tilde{M} = \sup_{u \le 1} \tilde{r}(u) = (T + \hat{T})^{-1/2}$.

Corollaire : Si $d = 2$, les processus r et $\tilde{r}$ ont même loi. En particulier, on a :

$$\sup_{u \le 1} r(u) \overset{(\text{loi})}{=} (T + \hat{T})^{-1/2}.$$

Références :

[1] J. Bertoin, J. W. Pitman : Path transformations connecting Brownian bridge, Excursion and Meander. A paraître au Bull. Sci. Maths. (1993).

[2] Ph. Biane, M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Maths., 2e série, 111 (1987), p. 23-101.

[3] A. N. Borodin :

[4] N. Eisenbaum :

[5] L. Erdös : Communication personnelle (Automne 1992).

[6] T. Jeulin : Applications du grossissement de filtrations à l'étude des temps locaux du mouvement brownien. In: Lect. Notes in Maths, vol. 1118, Springer (1985).

[7] D. Kennedy : The distribution of the maximum of the brownian excursion. J. App. Prob. 13 (1976), p. 371-376.

[8] D. Khoshnevisan : Level crossings of the empirical process. Stoch. Processes and their applications, 43 (1992), p. 331-343.

[9] J. W. Pitman, M. Yor : Dilatations d'espace-temps, réarrangements des trajectoires browniennes, et quelques extensions d'une identité de Knight. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris (1993).

[10] G. R. Shorack, J. A. Wellner : Empirical processes with applications in statistics. Wiley, New-York (1986).

[11] W. Vervaat : A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. Ann. Prob. 7 (1979), p. 141-149.