Sur la tribu germe du processus des excursions, relativement à la mesure d'Itô[1].

4 Sept. 92

Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues, on considère la mesure d'Itô n, et le processus des coordonnées $(e(t), t \geq 0)$; on note :

$$V(e) = \inf\{u > 0 : e(u) = 0\}.$$

La mesure n peut être caractérisée de la manière suivante :

(i) $n(V \in dv) = \dfrac{c\,dv}{v^{3/2}}$, pour une certaine constante c ;

(ii) Conditionnellement à $V = v$, le processus $(|e(u)|, u \leq V = v)$ est un pont de Bessel de dimension 3, et de longueur v ;

(iii) $\varepsilon = \overline{\lim_{t \downarrow 0}} \, \mathrm{sgn}(e(t))$ est une variable de Bernoulli, indépendante de $(|e(u)|; u \geq 0)$

[Précision : Pour les notions d'indépendance en particulier, on peut toujours se ramener à discuter en termes de n_a, $a > 0$, où :

$$n_a = \frac{n(\cdot \; ; V \geq a)}{n(V \geq a)}$$]

On pose : $\mathcal{G}_t = \sigma\{e(u); u \leq t\}$, et $\mathcal{G}_{0+} = \bigcap_{t>0} \mathcal{G}_t$.

On se propose de montrer le

Théorème : Aux ensembles n-négligeables près, on a : $\boxed{\mathcal{G}_{0+} = \sigma(\varepsilon)}$.

Démonstration : i) Introduisons $(\mathcal{G}_t^{(V)}, t \geq 0)$ la plus petite filtration qui contient $(\mathcal{G}_t)$, et qui rend la variable V mesurable à l'instant $t = 0$;

On a : $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_t^{(V)}$, et donc : $\mathcal{G}_{0+} \subseteq \mathcal{G}_{0+}^{(V)} \equiv \lim_{t \downarrow 0} (\mathcal{G}_{tV}^{(V)}$

De plus, on a :

$$\mathcal{G}^{(V)}_{tV} \equiv \sigma(\varepsilon) \vee \sigma\{ \Pi(u) ; u \leq t \} \vee \sigma(V),$$

où $\left(\Pi(u) = \frac{1}{\sqrt{V}} |e(uV)| , u \leq 1 \right)$ est indépendant de V, et est un pont de Bessel (3) standard.

D'après le lemme de Lindvall-Rogers, on a donc : $\mathcal{G}^{(V)}_{0+} = \sigma\{\varepsilon ; V\}$, aux ensembles n-négligeables près.

ii) Maintenant, pour montrer que $\mathcal{G}_{0+} = \sigma(\varepsilon)$ aux ensembles négligeables près, sous n_a, il nous suffit de montrer que, pour tout couple de fonctions $\underbrace{\text{boréliennes}}_{\text{ou mieux : continues}}$, bornées φ, f, la variable :

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \downarrow 0} n_a \left(\varphi(\varepsilon) f(V) \mid \mathcal{G}_t \right)$$

est $\sigma(\varepsilon)$-mesurable ; on peut bien sûr supposer dorénavant que : $\text{supp}(f) \subset]a, \infty$

Or, on a, pour $t < a$:

$$n_a \left(\varphi(\varepsilon) f(V) \mid \mathcal{G}_t \right) = \varphi(\varepsilon)\, n_a \left(f(V) 1_{(V>t)} \mid \mathcal{G}_t \right) 1_{(V>t)}$$

$$= \varphi(\varepsilon) \frac{n\left(f(t + V \circ \theta_t) \mid \mathcal{G}_t \right) 1_{(V>t)}}{n(V > a \mid \mathcal{G}_t)}$$

On utilise maintenant la propriété de Markov sous n, qui fait intervenir le semi-groupe $Q_t(x; dy)$ du mouvement brownien tué en son 1er temps d'atteinte de 0

On a donc :

$$(1) \quad n_a \left(\varphi(\varepsilon) f(V) \mid \mathcal{G}_t \right) = \varphi(\varepsilon) \frac{Q_{e(t)} \left(f(t+V) \right)}{Q_{e(t)} (V > a-t)} 1_{(V>t)}$$

Or, on a : $$Q_x(V \in du) = \frac{|x|\, du}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) \qquad (2)$$

L'expression : $$\frac{Q_{e(t)}\left(f(t+V)\right)}{Q_{e(t)}\left(V > a-t\right)} 1(V>t)$$

converge donc, lorsque $t \longrightarrow 0$, vers :

$$\frac{\int_a^\infty \frac{du}{u^{3/2}} f(u)}{\int_a^\infty \frac{du}{u^{3/2}}}$$

(le fait important est que x en (2) s'est simplifié en haut et en bas).

et le membre de gauche de (1) converge donc bien p.s., lorsque $t \longrightarrow 0$, vers une variable qui ne dépend que de ε.

<u>Remarque</u> : Dans ces différentes questions, ce que j'utilise toujours, est, d'une part, le lemme de Lindvall-Rogers, et, d'autre part, le fait que pour une filtration $(\mathcal{F}_t)$, on a : $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$, où (T_n) est une suite de t.a. strictement positifs, décroissant vers 0 (par exemple, dans la démonstration précédente, on a pris : $T_n = \frac{1}{n} V$, dans la filtration $(\mathcal{G}_t^{(V)})$).

En ce qui concerne le point c) de ma rédaction précédente :

J'ai l'impression que je peux finir la démonstration comme suit :

- on commence par montrer :

(1) $$\hat{\mathcal{F}}_{\gamma} \subseteq \hat{\mathcal{F}}_{\gamma-} \vee \sigma(\beta_1 > 0) \vee \sigma\{\underset{\uparrow}{m_u}, u \leq 1\}$$

méandre associé à β.

Ceci va découler de :

$$\hat{\mathcal{F}}_{\gamma} = \hat{\mathcal{F}}^{(\gamma)}_{\gamma} \subseteq \hat{\mathcal{F}}^{(\gamma)}_{(1 \wedge \rho)},$$

car $(1 \wedge \rho)$ est un $(\hat{\mathcal{F}}^{(\gamma)}_t)$ temps d'arrêt $> \gamma$;

Or, comme sur l'intervalle $[\gamma, \rho]$, B n'a pas changé de signe,

on a bien : $$\hat{\mathcal{F}}^{(\gamma)}_{1 \wedge \rho} \subseteq \underbrace{(\hat{\mathcal{F}}_{\gamma-}) \vee \sigma\{\beta_{\gamma+u} ; u \leq 1-\gamma\}}_{}$$

qui n'est autre que la tribu de droite qui figure en (1).

- Ensuite, (1) étant établi, on utilise l'indépendance de $\hat{\mathcal{F}}_{\gamma-} \vee \sigma(\beta_1 > 0)$ et $\sigma\{m_u, u \leq 1\}$, et Lindvall-Rogers.

d'où : $$\hat{\mathcal{F}}_{\gamma} = \hat{\mathcal{F}}_{\gamma-} \vee \sigma(\beta_1 > 0).$$

Par contre, je ne comprends toujours pas l'affirmation de Malric, qui dit que $\mathrm{sgn}(B_1)$ est $\hat{\mathcal{F}}_{\gamma}$ mesurable, et que : $\hat{\mathcal{F}}_{\gamma} = (\hat{\mathcal{F}}_{\gamma-}) \vee \sigma(\mathrm{sgn}(B_1$

Je pense que ceci est faux !