Sur les lois de certaines fonctionnelles du processus de Bessel symétrisé.

Pour tout $\mu \in (0,1)$, on note $(\tilde{R}_{-\mu}(t); t \geq 0)$ le processus de Bessel symétrisé, issu de 0, d'indice $(-\mu)$, ou de "dimension" $d = 2(1-\mu)$, et $(\tilde{\rho}_{-\mu}(t); t \leq 1)$ le pont associé à ce processus.

On utilisera également la notation $\tilde{R}_{(d)}$ pour $\tilde{R}_{-\mu}$.

Introduisons maintenant les notations :

$$A_\mu(t) = \int_0^t ds\, 1(\tilde{R}_{-\mu}(s) > 0) \quad ; \quad a_\mu = \int_0^1 ds\, 1(\tilde{\rho}_{-\mu}(s) > 0) ;$$

$$S_\mu(t) = \int_0^t ds\, \operatorname{sgn}(\tilde{R}_{-\mu}(s)) \quad ; \quad s_\mu = \int_0^1 ds\, \operatorname{sgn}(\tilde{\rho}_{-\mu}(s)).$$

On a alors les deux théorèmes :

Théorème 1 :

1) $$E\left[\alpha \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t - \beta A_\mu(t)}\right] = \frac{1 + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\mu-1}}{1 + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\mu}}.$$

2) $$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty dt\, t^{\mu-1} e^{-t} E\left[e^{-\beta t a_\mu}\right] = \frac{2}{1 + (1+\beta)^\mu}$$

Théorème 2 :

3) $$E\left[\alpha \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t + i\beta S_\mu(t)}\right] = \frac{(\alpha+i\beta)^{\mu-1} + (\alpha-i\beta)^{\mu-1}}{(\alpha+i\beta)^\mu + (\alpha-i\beta)^\mu}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \sin((1-\mu)\theta)}, \quad \text{où } \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

4) $$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty dt\, t^{\mu-1} e^{-t} E\left[e^{i\beta t s_\mu}\right] = \frac{2}{(1+i\beta)^\mu + (1-i\beta)^\mu}.$$

Ces deux théorèmes sont obtenus très aisément à l'aide de la théorie des excursions.

L'étude asymptotique des processus de Bessel, lorsque $d \to \infty$, est intimement liée au lemme de Poincaré (voir Davis [ ], Mc Kean [ ],)

Nous développons ci-dessous l'étude asymptotique de $\widetilde{R}_{(d)}$, lorsque $d \to 0$.

On a, tout d'abord, les résultats partiels suivants :

Théorème 3 :

$$5) \quad \left(\frac{1}{d}\int_0^t \operatorname{sgn}(\widetilde{R}_{(d)}(s))\,ds \,;\, t \geq 0\right) \xrightarrow[(d \to 0)]{(d.f)} \left(\frac{\pi}{4} C_t \,;\, t \geq 0\right)$$

où $(d.f)$ indique la convergence en loi des marginales de rang fini, et $(C_t \,;\, t \geq 0)$ est un processus de Cauchy standard.

$$6) \quad \left(\frac{1}{d^2}\int_0^t ds\, R^2_{(d)}(s) \,;\, t \geq 0\right) \xrightarrow[d \to 0]{(d.f)} \left(\frac{1}{4}\sigma(t) \,;\, t \geq 0\right),$$

où $\sigma(t) = \inf\{u : B_u > t\}$, avec B mouvement brownien réel, issu de 0.

Preuve : Le premier résultat découle aisément du théorème 2, 3), et le second de la formule de Cameron-Martin,

$$E\left[\exp - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t ds\, R^2_{(d)}(s)\right] = \frac{1}{(ch(\lambda t))^{d/2}}.$$

Les deux résultats individuels qui constituent le théorème 3 peuvent être compris de façon plus globale à l'aide du

Théorème 4 : Pour une "bonne classe" de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$7) \left(\frac{1}{d}\int_0^t ds\, f\left(\frac{1}{d}\widetilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right),\ t \geq 0\right) \xrightarrow[(d \to 0)]{(d.f)} \left(\frac{1}{4}\int_0^{\tau(t)} \frac{ds}{|B(s)|} f(B(s)) \,;\, t \geq 0\right)$$

où l'on note : $x^{\odot 2} = x^2 \operatorname{sgn}(x)$, et B désigne un mouvement brownien réel issu de 0, et $(\tau(t), t \geq 0)$ l'inverse du temps local de B en 0.

Démonstration : On a :

$$\int_0^t ds\, f\left(\frac{1}{d}\tilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right) = \int_0^t ds\, \frac{R^2_{(d)}(s)}{R^2_{(d)}(s)}\, f\left(\frac{1}{d}\tilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right).$$

Or :

8) $$\frac{1}{2}\tilde{R}^{\odot 2}_{-\mu}(t) = \tilde{R}_{-\mu/2}\left(\int_0^t ds\, R^2_{-\mu}(s)\right).$$

Posons : $C_{(d)}(t) = \int_0^t ds\, R^2_{-\mu}(s)$. Il vient :

$$\int_0^t ds\, f\left(\frac{1}{d}\tilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right) = \int_0^{C_{(d)}(t)} \frac{du}{2\, R_{-\mu/2}(u)}\, f\left(\frac{1}{1-\mu}\tilde{R}_{-\mu/2}(u)\right).$$

Posons encore : $c = 1-\mu$, et faisons le changement de variables : $u = c^2 v$

Il vient, en notant : $X^{(c)}(u) = \frac{1}{c} X(c^2 u)$ $(u \geq 0)$:

$$\int_0^t ds\, f\left(\frac{1}{d}\tilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right) = \frac{c}{2}\int_0^{\frac{1}{c^2}C_{(d)}(t)} \frac{dv}{R^{(c)}_{-\mu/2}(v)}\, f\left(\tilde{R}^{(c)}_{-\mu/2}(v)\right)$$

9) $$= \frac{d}{4}\int_0^{\frac{1}{c^2}C_{(d)}(t)} \frac{dv}{R^{(c)}_{-\mu/2}(v)}\, f\left(\tilde{R}^{(c)}_{-\mu/2}(v)\right).$$

Soit $(K(t), t \geq 0)$ l'inverse du processus croissant $(C_{(d)}(t), t \geq 0)$.

On a donc :

$$\int_0^{K(t)} ds\, R^2_{(d)}(s) = t\,,$$

d'où, d'après la formule 8) :

$$K(t) = \int_0^t \frac{ds}{R^2_{(d)}(K(s))} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_{-\mu/2}(s)}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{c^2}\, C_{(d)}(t) = \frac{1}{c^2} \inf\left\{ v : \frac{1}{2}\int_0^v \frac{ds}{R_{-\mu/2}(s)} > t \right\}$$

$$= \inf\left\{ u : \frac{c}{2}\int_0^u \frac{ds}{R^{(c)}_{-\mu/2}(s)} > t \right\}$$

La "dimension" du processus $R^{(c)}_{-\mu/2}$ est $\tilde{d} = 2\left(1-\frac{\mu}{2}\right) = 2-\mu$.
On a donc : $c = 1-\mu = \tilde{d}-1$.
D'où :

$$\frac{1}{c^2}\, C_{(d)}(t) = \inf\left\{ u : \frac{\tilde{d}-1}{2}\int_0^u \frac{ds}{R^{(c)}_{-\mu/2}(s)} > t \right\}$$

Finalement, on obtient donc, à l'aide de la formule 9), la convergence en loi (au sens (d.f)) de :

$$\left(\frac{1}{d}\int_0^t ds\, f\left(\frac{1}{d}\tilde{R}^{\odot 2}_{(d)}(s)\right) \; ; t \geq 0 \right)$$

vers :

$$\left(\frac{1}{4}\int_0^{\sigma(t)} \frac{ds}{|B_s|}\, f(B(s)) \; ; t \geq 0 \right) .$$