Théorème de Pitman et grossissement de filtration.

(n^e édition !)

9 Juillet 1996.

L'objet de cette Note est de bien mettre en évidence le fait, qui n'est probablement pas présenté suffisamment de façon explicite dans la littérature, que le théorème de Pitman peut s'exprimer en termes de martingales, et pas seulement du processus de Bessel de dimension 3. (Une première tentative, un peu maladroite, dans cette direction, a été faite dans le Théorème 12.6 de Zurich II).

Comme conséquences particulièrement importantes, on énonce des versions du théorème de Pitman pour tous les processus de Bessel. (transients ou non).

1. Le théorème de Pitman pour une martingale $Y_t \geq 0$, $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Posons $T_0 = \inf\{t : Y_t = 0\}$ $(\leq \infty)$.

On a alors : (1) $\frac{1}{Y_t} = R_{A_t}$, $t < T_0$, où : $A_t = \int_0^t \frac{d\langle Y\rangle_s}{Y_s^4}$

et $(R_u, u \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3, dans la filtration d'origine changée de temps, i.e. : $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{F}_{\tau_u}$.

Démonstration de (1) : Application de la formule d'Itô. $\square$

Grossissons maintenant la filtration $(\mathcal{G}_u)$, en $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{G}_u \vee \sigma(J_u)$,

où : $J_u \equiv \inf_{s \geq u} (R_s)$.

Le théorème de Pitman (légèrement amélioré...) affirme alors que :

(2) $\qquad R_u = r + 2J_u - B_u, \qquad u \geq 0,$

où B est un $(\tilde{\mathcal{G}}_u)$ mouvement brownien.

Posons : $\sigma_t = \sup_{v \geq t} Y_v$; de l'égalité : $\dfrac{1}{Y_t} = R_{A_t}$, on déduit :

$$\frac{1}{\sigma_t} = J_{A_t}.$$

Faisons maintenant subir à (2) le changement de temps (A_t), il vient :

(3) $$\frac{1}{Y_t} = \frac{1}{y} + \frac{2}{\sigma_t} - M_t,$$

où (M_t) est une martingale locale dans la filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \underbrace{\sigma(\sigma_t)}_{(\text{sic!})}$.

Pour aider les calculs, posons : $Z_t = \dfrac{1}{Y_t}$, ou encore :

$$Y_t = 1/Z_t.$$

On a alors, par application de la formule d'Itô (dans la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$) :

$$Y_t = y - \int_0^t \frac{dZ_u}{Z_u^2} + \int_0^t \frac{d\langle Z\rangle_u}{Z_u^3}$$

$$= y - \int_0^t Y_u^2\, d\left(\frac{2}{\sigma_u} - M_u\right) + \int_0^t Y_u^3\, \frac{d\langle Y\rangle_u}{Y_u^4}$$

On obtient donc finalement :

$$Y_t = y + 2\int_0^t \left(\frac{Y_u^2}{\sigma_u^2}\right)(d\sigma_u) + \int_0^t \frac{d\langle Y\rangle_u}{Y_u} + \tilde{Y}_t$$

où $\tilde{Y}_t = \int_0^t Y_u^2\, dM_u$ est la partie martingale de Y dans la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

On a donc finalement montré le

Théorème 1 : Si $(Y_t, t \geq 0)$ est une martingale locale ≥ 0, telle que $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, alors elle admet pour décomposition dans la filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\sigma_t)$:

(!!)

$$(4) \qquad \boxed{Y_t = y + 2\int_0^t d\sigma_u + \int_0^t \frac{d\langle Y\rangle_u}{Y_u} + \tilde{Y}_t}$$

Ce théorème s'applique en particulier à $Y_t = B_{t\wedge T_0}$, où (B_t) est un mouvement brownien issu de $x > 0$, mais aussi à $Y_t = \frac{1}{R_t^{n-2}}$, pour $n > 2$, et $R_0 = r > 0$; on obtient alors :

$$(5) \qquad \boxed{R_t = r - \beta_t + 2J_t - \frac{n-3}{2}\int_0^t \frac{du}{R_u}, \quad t \geq 0,}$$

et, sous cette forme, on peut maintenant faire tendre r vers 0 ; ~~[illegible]~~ la décomposition (5) est donc, bien entendu, vraie encore avec $r = 0$, le cas le plus classique étant : $n = 3$.

2. Application aux autres processus de Bessel $(n<2)$: Pour cela, on peut prendre encore :

$$Y_t = R_{t\wedge T_0}^{2-n}, \qquad (n<2)$$

puis retraduire le résultat $(4)_n$ que nous allons ainsi obtenir, en $(5)_n$.

Il y a probablement également des résultats intéressants avec : $\log R_{t\wedge T_1}$, lorsque $R_0 = r > 1$.

3. Un complément à la formule (4).

Retournons au théorème 1. Puisque nous nous sommes proposé de donner une "version martingale" du théorème de Pitman, il est naturel de donner une décomposition plus générale de toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale dans la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

Théorème 2: (On conserve les notations du théorème 1).

Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, qui se décompose sous la forme :

$$M_t = \int_0^t \mu_u \, dY_u + N_t ,$$

avec (N_t) martingale locale continue, orthogonale à Y.

On a alors la décomposition :

$$(\quad) \qquad \boxed{M_t = \tilde{M}_t + 2\int_0^t \mu_u \, d\sigma_u + \int_0^t \mu_u \frac{d\langle Y\rangle_u}{Y_u}}$$

où $(\tilde{M}_t)$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ martingale locale.

Commentaires : 1. En fait, l'apport de ce théorème consiste simplement à dire ~~que~~ précisément que, si (N_t) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à (Y_t), alors (N_t) reste une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ martingale locale.

2. Il est intéressant de comparer la formule ( ) avec la formule (12.17) du théorème 12.6 de Zürich II . Les deux formules se déduisent facilement l'une de l'autre.

Quelques grossissements progressifs de la filtration du mouvement brownien.

16 Juillet 1996.

Dans la note du 3 Juillet, j'ai montré la formule de grossissement suivante :

$$(1) \qquad \boxed{Y_t = y + 2\int_0^t (d\sigma_u) + \int_0^t \frac{d\langle Y\rangle_u}{Y_u} + \tilde{Y}_t},$$

où $(Y_t, t \geq 0)$ désigne une martingale locale ≥ 0, $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$,
et $\sigma_t = \sup_{u \geq t} Y_u$.

(1) est la décomposition canonique de Y dans la filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\sigma_t)$
ie : $(\tilde{Y}_t)$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ martingale locale.

Lorsque (Y_t) est strictement positive, elle se représente sous la forme :

$$(2) \qquad Y_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right),$$

avec (M_t) $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, et $\langle M\rangle_\infty = \infty$.

En appliquant simplement la formule d'Itô à $\log Y_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$,
et en posant : $\Sigma_t = \sup_{u\geq t}\left(M_u - \frac{1}{2}\langle M\rangle_u\right)$, la formule (1) devient :

$$(3) \qquad \boxed{M_t = M_0 + 2\int_0^t (d\Sigma_s) + \langle M\rangle_t + \tilde{M}_t},$$

où $(\tilde{M}_t)$ est une martingale locale dans la filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\Sigma_t)$

Remarquons que : $\int_0^t d\Sigma_s = \Sigma_t - \Sigma_0 = -(S_t - \Sigma_t)^+$, et on peut donc écrire (3) sous la forme équivalente :

$$(3') \quad \boxed{\begin{array}{l} M_t - M_0 + 2(S_t - \Sigma_t)^+ - \langle M \rangle_t = \tilde{M}_t \\ \text{est une } (\tilde{\mathcal{F}}_t) \text{ martingale.} \end{array}},$$

(on a noté : $S_t = \sup_{s \leq t} (M_s - \frac{1}{2}\langle M \rangle_s)$; $\Sigma_t = \sup_{s \geq t} \left(M_s - \frac{1}{2}\langle M \rangle_s\right)$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\Sigma_t). \quad).$$

On peut bien sûr remplacer (M_t) par $(2\mu) M_t$ (pour $\mu > 0$), et la décomposition (3') devient :

$$(3')_\mu \quad (2\mu) M_t - (2\mu) M_0 + 2(2\mu)(S_t^\mu - \Sigma_t^\mu)^+ - (4\mu^2)\langle M \rangle_t$$

est une $(\tilde{\mathcal{F}}_t^{(\mu)})$ martingale locale, où l'on a posé :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^{(\mu)} = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\Sigma_t^\mu), \text{ et : } \Sigma_t^\mu = \sup_{u \geq t} (M_u - \mu \langle M \rangle_u)$$

$$S_t^\mu = \sup_{s \leq t} (M_s - \mu \langle M \rangle_s)$$

(<u>remarque</u> : il faut faire attention au facteur 2, ou 1/2, qui traîne un peu partout, à cause du : $M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t$, etc...).

En divisant les 2 membres de $(3')_\mu$ par (2μ), on obtient finalement :

$$(4) \quad \boxed{\begin{array}{c} \{ M_t - M_0 + 2(S_t^\mu - \Sigma_t^\mu)^+ - (2\mu)\langle M \rangle_t, \ t \geq 0 \} \\ \text{est une } (\tilde{\mathcal{F}}_t^\mu) \text{ martingale locale.} \end{array}}$$

En particulier, on a ainsi obtenu le

Théorème : Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, et $\mu > 0$. On pose :

$$S_t^\mu = \sup_{s \leq t} (B_s - \mu s) \quad , \quad \Sigma_t^\mu = \sup_{s \geq t} (B_s - \mu s).$$

On a alors :

$$(5) \quad \boxed{\begin{array}{l} B_t + 2(S_t^\mu - \Sigma_t^\mu)^+ - (2\mu)t = \tilde{B}_t^{(\mu)} \\ \text{est un } (\tilde{\mathcal{F}}_t^{(\mu)}) \text{ mouvement brownien.} \end{array}}$$

Nous allons maintenant donner une vérification partielle de la formule (5) en montrant que la projection (optionnelle = prévisible) du processus :

$$(6) \qquad \{(S_t^\mu - \Sigma_t^\mu)^+ - \mu t \;, t \geq 0\}$$

sur la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

Pour cela, commençons par le

Lemme : Soit $t > 0$ fixé, la loi conditionnelle de Σ_t^μ sachant $\mathcal{F}_t$ est celle de :

$$(B_t - \mu t) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \mathbf{e} \,,$$

où $\mathbf{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de $\mathcal{F}_t$.

Démonstration : Posons $X_t = B_t - \mu t$; on a :

$$\Sigma_t^\mu = \sup_{s \geq t} X_s = X_t + \sup_{s \geq 0} \tilde{X}_s \quad , \quad \text{où}$$

$(\tilde{X}_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien, avec drift $(-\mu)$, indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Il suffit donc de montrer (le résultat bien connu !) :

$$(7) \qquad \sup_{s \geq 0} (\tilde{X}_s) \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{2\mu} \mathbf{e} .$$

Or, la martingale : $Y_t = \exp(2\mu \tilde{X}_t)$ tend vers 0, lorsque $t \to \infty$,

on a donc : $\quad \frac{1}{U} \overset{(\text{loi})}{=} \exp\left(2\mu \left(\sup_{s \geq 0} \tilde{X}_s\right)\right)$,

ce qui donne (7).

Remarque : le résultat (7) peut être considéré comme une conséquence partielle du lemme d'Azéma (i.e. : (8) $A_\infty \overset{(\text{loi})}{=} \mathbf{e}$) ; en fait, plus généralement, (8) implique le résultat universel :

$$(9) \qquad \sup_{t \geq 0} Y_t \overset{(\text{loi})}{=} 1/U .$$

Venons-en au calcul explicite de la projection optionnelle $(\Pi_t^\mu, t \geq 0)$ de (6).

On a, d'après le lemme :

$$(10) \qquad \Pi_t^\mu = (2\mu) \int_0^{(S_t - X_t)} dx \,(\exp(-2\mu x)) \,((S_t - X_t) - x) - \mu t .$$

où l'on a noté, pour simplifier : $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$, et $X_s = B_s + \mu s$.

ou, de façon équivalente :

$$(10') \qquad \boxed{\Pi_t^\mu = \varphi_\mu(S_t - X_t) - \mu t, \quad \text{avec :} \quad \varphi_\mu(a) = a - \left(\frac{1 - e^{-2\mu a}}{2\mu}\right)}$$

Cherchons maintenant à quelle condition sur une fonction φ régulière, le processus : $\{\varphi(S_t - X_t) - \mu t,\ t \geq 0\}$ est une martingale ;

une simple application de la formule d'Itô donne la CNS :

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\varphi''(x) = \mu\left(1 - \varphi'(x)\right) ,$$

et cette condition est, bien entendu, satisfaite pour $\varphi \equiv \varphi_\mu$, puisque :

$$1 - \varphi_\mu'(x) = e^{-2\mu x} . \qquad \square$$

Quelques remarques générales :

R1 : Le plus remarquable, dans tous ces développements, est que l'on obtient des formules de grossissement avec des hypothèses très faibles sur les lois, ce qui est assez inhabituel [dans la théorie du grossissement] ; toutefois, cela peut s'expliquer par le fait que l'on procède par changement de temps. (ie : Dubins-Schwarz, etc...).

R2 : Y-a-t-il d'autres résultats universels que (9), qui découlent de (8) ? (8) et (9) sont-ils équivalents ?

C'est une question apparemment pédagogique / académique, mais qui peut nous mener assez loin (?).

R3 : Si, au lieu de considérer le mouvement brownien avec drift constant, on considère : $B_t - \varphi(t)$ pour une classe de fonctions telle que : $\sup_t \left(B_t - \varphi(t)\right) < \infty$, peut-on expliciter la décomposition canonique de (B_t) dans la filtration $\mathcal{F}_t^\varphi = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\Sigma_t^\varphi)$?

Enfin, au lieu de considérer $B_t - \varphi(t)$, on peut considérer $B_t - \varphi(S_t)$, ou encore : $|B_t| - \varphi(L_t)$; pour ces "translations", les calculs sont probablement assez faciles à expliciter. $\square$