N° d'enregistrement au C.N.R.S

A.O.12.638

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

à l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6 -

par Monsieur Marc Yor

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse : CALCUL STOCHASTIQUE ET REPRESENTATIONS INTEGRALES.

Soutenue le 2 Juin 1976

devant le Jury composé de : Messieurs

J. NEVEU	Président
P.A. MEYER	Examinateurs
P. PRIOURET	
M. WALDSCHMIDT	
F. HIRSCH	Membre Invité

A mes parents, A Carmel

Une fois achevée la rédaction des articles qui constituent cette thèse, c'est avec plaisir que je remercie toutes les personnes qui, par leur enseignement, leur collaboration et leurs qualités humaines ont, directement ou non, contribué à son élaboration, tout en regrettant de ne pouvoir - par faute de place - les nommer toutes.

L'enseignement général que j'ai reçu à l'ENSET m'a largement aidé et incité à faire de la recherche, et a été pour moi un apport essentiel. Que Monsieur Francis HIRSCH trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur Jacques NEVEU, dont les cours ont été le fondement de ma formation en théorie des Probabilités, d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur Pierre PRIOURET, qui m'a dirigé tout au long de ce travail : j'ai trouvé auprès de lui une attention constante et une aide précieuse dans l'étude des questions auxquelles je me suis intéressé.

Elle va également à Monsieur Philippe COURREGE qui a essayé de m'initier aux difficultés de la théorie quantique des Champs.

Le travail incessant de Monsieur Paul-André MEYER a été pour moi un áiguillon de tous les instants. Il me serait bien difficile - comme d'ailleurs il l'a été à ceux qui m'ont précédé - de dire tout ce que je lui dois.

Je remercie Monsieur Michel WALDSCHMIDT de m'avoir fait connaitre un autre beau domaine des Mathématiques.

Enfin, j'ai bénéficié au Laboratoire de Calcul des Probabilités des meilleures conditions de travail, ainsi que de discussions fructueuses et d'aide de la part de ses habitants.

Je remercie en particulier Mesdames BOEHM, BOUVIER et GILLET qui ont frappé la plupart des Articles.

CALCUL STOCHASTIQUE ET REPRESENTATIONS INTEGRALES

par

Marc YOR

Cette thèse est constituée de plusieurs articles que l'on peut regrouper en trois parties principales, dont les liens apparaîtront dans le résumé qui suit.

1. - La correspondance entre représentations de Weyl et mesures quasi-invariantes sur les EVT fait de l'étude de ces mesures un chapitre important de la théorie quantique des champs.

L'article (1.1), écrit en collaboration avec P. Priouret, a pour objet la construction et l'étude directe de la mesure sur $\mathcal{W} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, markovienne, euclidienne, et quasi-invariante sous les translations de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, construite indépendamment par Ph. Courrège et P. Renouard dans leur étude de la théorie des champs en dimension $d = 1$. On utilise principalement la théorie des processus de diffusion et le calcul stochastique, ce qui permet d'obtenir en particulier une formule explicite du module de quasi-invariance e^{Λ} de la mesure en question.

Inversement, dans l'article (1.2), on étudie, sous certaines conditions de régularité, toutes les mesures sur $\mathcal{W}$ qui sont markoviennes, quasi-invariantes, et qui admettent e^{Λ} pour module de quasi-invariance.

Cette étude réciproque est également menée dans l'article (1.3) - écrit en collaboration avec G. Royer - dans le cas où la fonction P qui intervient dans l'expression de Λ est un polynôme borné inférieurement. On montre alors que :

- le cône $\mathcal{E}$ formé des mesures positives bornées sur $\mathcal{W}$, quasi-invariantes et admettant e^{Λ} pour module de quasi-invariance, est la réunion de ses chapeaux, et est fermé dans $\mathcal{M}_{+}^{b}(\mathcal{W})$, qui est muni de la topologie de la convergence étroite associée à la topologie de la convergence compacte ;

- les mesures extrêmales du cône $\mathcal{E}$ sont markoviennes.

2. - Le calcul stochastique, qui a été l'outil essentiel des articles précédents, relatifs à la dimension $d = 1$, n'a commencé à se développer, pour des processus à plusieurs paramètres, que pendant les deux dernières années.

Les trois articles suivants représentent la contribution de l'auteur à ce développement.

En (2.1), on obtient la représentation des martingales de carré intégrable relatives aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres comme somme de différentes intégrales stochastiques, deux à deux orthogonales. Ce résultat généralise le théorème de Wong et Zakaï obtenu pour le processus de Wiener à deux paramètres. La méthode utilisée consiste à exprimer comme intégrales stochastiques certaines martingales exponentielles remarquables.

Dans l'article (2.2), on compare, pour Z martingale continue complexe, à valeurs dans U, ouvert de $\mathbb{C}$, et f fonction holomorphe sur U, les intégrales $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} f(z)\, dz$ et $\int_0^t f(Z_s)\, dZ_s$. En conséquence, le théorème des résidus (et donc la formule de Cauchy) peuvent s'exprimer, le long de certains lacets du processus de Wiener complexe à deux paramètres, à l'aide d'intégrales stochastiques.

Dans l'article (2.3), on caractérise les processus de carré intégrable qui sont stochastiquement différentiables par rapport aux composantes X et Y du processus de Wiener complexe $Z = X + iY$ à deux paramètres. Ceci généralise et améliore certains résultats de R. Cairoli et J.B. Walsh.

3. - Enfin, dans le cours de ce travail, j'ai été conduit naturellement à aborder les questions suivantes relatives au calcul stochastique usuel (c'est à dire : pour des processus indexés par $\mathbb{R}_+$).

En [3.1] , j'ai développé quelques compléments à la théorie des intégrales stochastiques optionnelles de P.A. Meyer et étudié différentes exponentielles de semi-martingales - en particulier, on peut associer de façon naturelle à une martingale X vérifiant certaines conditions d'intégrabilité une famille remarquable de martingales exponentielles, permettant par ailleurs de caractériser le processus $< X^c, X^c >$ et la mesure de Lévy ν associée à X .

J'ai montré en [3.2] , à partir d'un travail de K.A. Yen et Ch. Yoeurp, les liens étroits qui existent entre les martingales locales X qui possèdent une propriété de représentation prévisible ou optionnelle et les probabilités extrémales dans l'ensemble de celles qui font de X une martingale locale. De plus, si X est le processus des projections sur l'espace des trajectoires cadlag à valeurs réelles, toute probabilité P faisant de X une martingale telle que $\int \sup_{(s \leq t)} |X_s| \, dP < \infty$ pour tout t est barycentre de lois extrêmales.

LISTE DES ARTICLES

(0.1) Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert. Ann. Inst. Henri Poincaré - Vol. X , n°1, 1974, p.55-88.

(0.2) Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach. Ann. Inst. Henri Poincaré - Vol. X , n°1, 1974, p.31-36.

(1.1) Processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (en collaboration avec P. Priouret). Astérisque n°22 - 23 (1975) p.247-290.

(1.2) Etude de mesures de probabilité sur $C(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$, quasi-invariantes sous les translations de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$. Ann. Inst. Henri Poincaré - Vol. XI - n°2 - 1975 - p.127-171.

(1.3) Représentation intégrale de mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (en collaboration avec G. Royer) (à paraître aux Ann. Inst. Fourier).

(2.1) Représentation des martingales de carré intégrable relatives aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres. (à paraître au : Z. für Wahr).

(2.2) Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens.

(2.3) Etude de certains processus (stochastiquement) différentiables ou holomorphes.

(3.1) Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles (à paraître dans le : Séminaire de Probabilités X).

(3.2) Représentation intégrale des martingales de carré intégrable. Etude des distributions extrémales.

REPRESENTATION INTEGRALE DE CERTAINES MESURES QUASI-INVARIANTES SUR $\mathcal{C}(\mathbb{R})$; MESURES EXTREMALES ET PROPRIETE DE MARKOV

PAR G. ROYER ET M. YOR (**)

Introduction.

A la suite de l'article [4] de P. Courrège et P. Renouard ainsi que des travaux de P. Priouret et des auteurs (cf [12], [13], [16]), on s'intéresse ici à certaines mesures sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (*) qui sont quasi-invariantes sous les translations de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (*) ; de façon précise soit P un polynôme non constant borné inférieurement sur $\mathbb{R}$ et $a(f, \omega)$ la fonction sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$a(f,\omega) = \exp \int_{\mathbb{R}} [(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)) f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t))] dt,$$

on s'attache à l'étude du cône C de toutes les mesures μ positives bornées sur la tribu borélienne de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui satisfont :

(Q) $\qquad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \mu(f + d\omega) = a(f, \omega) \; \mu(d\omega)$ (on dit que $a(f, \omega)$

est une version du module de quasi-invariance de μ). On établira les deux résultats principaux suivants :

(*) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (resp : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) désigne l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ (resp : indéfiniment dérivables à support compact). On munit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

(**) Equipes de recherche associées au C.N.R.S n° 1 et 294.

1° toute mesure de C est intégrale de mesures appartenant aux génératrices extrémales de C.

2° toute mesure μ, élément d'une génératrice extrémale de C, est markovienne, du sens suivant : si pour $t \in \mathbb{R}$ on désigne par X_t la fonction sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ définie par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et si $\mathcal{F}_t^-$ est la tribu engendrée par les X_s, $s \leq t$, le processus $(\mu / \mu(1), \mathcal{F}_t^-, X_t)$ vérifie la propriété de Markov.

On rappelle que le caractère markovien d'une mesure quasi-invariante et le caractère local de son module de quasi-invariance sont liés (voir [4], n° 6,4).

§ 0 : PRELIMINAIRES ET RAPPELS.

Dans [4] ou [12] est construit un élément du cône C que l'on notera $\underline{\mu}$ et dont les propriétés suivantes seront utilisées par la suite :

1° $\underline{\mu}$ est une probabilité euclidienne, ce qui signifie que $\underline{\mu}$ est invariante par tout isomorphisme T_σ de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ induit par une translation ou une symétrie σ de $\mathbb{R}$ $([T_\sigma(\omega)](t) = \omega(\sigma(t))]$;

2° μ_o, loi commune des variables X_t, $t \in \mathbb{R}$, est donnée par $\underline{\mu}_o(dx) = \rho(x)dx$ avec $\rho = \exp - 2\hat{\zeta}$, où $\hat{\zeta}$ désigne une primitive convenable de la fonction ζ déterminée en fonction du polynôme P par $\zeta\,\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = P'$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(cf [4] n° 1,5 ou [12] n° 2,1).

3° $\underline{\mu}$ est la loi d'un processus de diffusion stationnaire, de générateur infinitésimal L donné par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad L(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi'' - \zeta \cdot \varphi'$$

La mesure $\underline{\mu}$ est donc markovienne et admet un semi-groupe de transition

$P_t(x, dy)$. De plus pour $t > 0$ on a $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, dy$, la fonction $p_t(x, y)$ ayant les propriétés suivantes :

0. 1 Proposition.

1° $p_t(x, y)$ *est indéfiniment dérivable et satisfait aux équations :*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_x\right) p = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*\right) p = 0 \quad \text{avec :}$$

$$L^* \varphi = \frac{1}{2} \varphi'' + (\zeta \varphi)'$$

2° p_t *satisfait à l'équation de Chapman - Kolmogorov :*

$$\forall x\ \forall y \in \mathbb{R} \quad p_{t+s}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x, z)\, p_s(z, y)\, dy$$

La propriété 1) reprend le théorème 2 de [12] et la propriété 2) sera établie en 3.3.

0. 2 Notations étant donnés $s < t$ on note $\mathcal{F}_{s,t}$ (resp $\mathcal{F}_t^+$) la tribu sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendrée par les X_u, $s \leqslant u \leqslant t$ (resp : $u \geqslant t$) ; $\mu_{[s, t]}$ désigne l'image par l'application canonique : $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([s, t])$ d'une mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$; enfin $\mu_{\{s, t\}}$ est la mesure sur $\mathbb{R}^2$ image de μ par l'application (X_s, X_t) ; on utilisera la propriété suivante :

0. 3. LEMME.

La probabilité $\mu_{\{s, t\}}$ *admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui est strictement positive en tout point de* $\mathbb{R}^2$.

Démonstration : on a évidemment $\mu_{\{s, t\}}(dx, dy) = p_{t-s}(x, y)\, \rho(x)\, dx\, dy$ et p_t et ρ sont continues et strictement positives.

Contrairement à l'usage on note $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$, (resp : $\mathbb{R}^-$, <), et on note $L^o_+(\mathbb{R}^2)$ le cône des classes de fonctions positives et mesurables pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

O. 4 Définition.

On appelle D le cône des applications $d : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow L^o_+(\mathbb{R}^2)$, $(s,t) \longmapsto d_{s,t}$ telles que $d_{s,t}(X_s, X_t)$ soit une $(\underline{\mu}, \mathcal{F}_{s,t})$ martingale intégrable ; autrement dit, $d_{s,t}(x, y)$ étant une version quelconque de $d_{s,t}$, on a pour $s_1 \leq s_2 < 0$, $t_1 \geq t_2 > 0$ et presque tout (x, y) :

$$(\varepsilon) \qquad d_{s_2,t_2}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} d_{s_1, t_1}(u,v)\, P_{s_2-s_1}(x, du)\, P_{t_1-t_2}(y, dv)$$

et $\qquad \underline{\mu}_{\{s,t\}}(d_{s,t}) < \infty$ (on se limite à $s < 0$ et $t > 0$ par commodité pour la fin de ce travail).

On s'appuiera par la suite sur :

O. 5 Proposition.

1° pour toute mesure $\mu \in C$, $\mu_{[s,t]}$ est équivalente à $\underline{\mu}_{[s,t]}$ et il existe un élément d de D tel que pour $s < 0$, $t > 0$, $\mu_{[s,t]} = d_{s,t}(X_s, X_t)\underline{\mu}_{[s,t]}$. L'application $\mathcal{J} : C \longrightarrow D$ ainsi définie est un isomorphisme de cônes.

2° pour que μ soit markovienne il faut et il suffit que $d_{s,t}$ soit décomposée c'est-à-dire qu'il existe des fonctions sur $\mathbb{R}$, φ^+_s et φ^-_t telles que :

$$\forall s < 0,\ t > 0 \quad \text{pour presque tout } (x, y) \qquad d_{s,t}(x,y) = \varphi^+_s(x)\, \varphi^-_t(y)$$

Démonstration. 1° l'existence de l'application $\mathcal{J}$ est reprise de [13] prop 11. D'autre part étant donné $d \in D$ si l'on définit la mesure $\mu^{s,t}$ sur $\mathcal{C}([s, t])$ par $\mu^{s,t} = d_{s,t}(X_s, X_t)\, \underline{\mu}_{[s,t]}$ l'équation (ε) exprime que le système $\mu^{s,t}$ est projectif (pour les applications canoniques : $\mathcal{C}([s_1, t_1]) \longrightarrow \mathcal{C}([s_2, t_2])$ lorsque $s_1 \leqslant s_2$, $t_2 \leqslant t_1$) ; il provient d'après le théorème de Kolmogorov sur les espaces polonais (cf [3] n° 4, 3 ou [10] page 79) d'une mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et on a immédiatement $\mu \in D$, $\mathfrak{I}(\mu) = d$.

2° le caractère nécessaire de cette condition est établi dans [13] et la réciproque est aisée à l'aide du caractère markovien de $\underline{\mu}$ (remarquons que $(\varphi_s^+, \mathcal{F}_s^+)$ et $(\varphi_t^-, \mathcal{F}_t^-)$ sont des martingales).

§ 1 LE CAS DU CHAMP LIBRE.

Dans ce paragraphe on étudie le cas particulier simple où le polynôme $P(x)$ est $\frac{m^2}{2} x^2$, $m > 0$; c'est le cas du champ libre en théorie quantique des champs ; $\underline{\mu}$ se trouve alors être une mesure gaussienne et on peut calculer explicitement les fonctions ρ et p_t correspondantes (cf [4] n° 2.6.2. et [16] n° 6.3 pour le lien avec les processus gaussiens) ; si pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on désigne par S_x la solution $x_1 e^{mt} + x_2 e^{-mt}$ de l'équation $S'' - m^2 S = 0$, la proposition suivante donne la structure du cône C (cf [13] prop 16) :

1.1. Proposition.

Toute mesure $\mu \in C$ se représente de manière unique sous la forme :

$$\mu(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(S_x + d\omega)\, \alpha(dx),$$ *α désignant une mesure $\geqslant 0$ bornée sur $\mathbb{R}^2$.*

1. 2. Remarques : ici le module de quasi-invariance vaut

$$a(f,\omega) = \left\langle \omega + \frac{1}{2} f,\ f'' - m^2 f \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} ;$$

il se prolonge continument à $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on peut montrer que toute mesure bornée sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-quasi-invariante avec le module $a(f,\omega)$ est portée par $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. D'autre part la bijection définie plus haut entre C et $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$ est biétroitement continue (voir le paragraphe 2).

On voit qu'ici les résultats annoncés dans l'introduction découlent de la proposition. 1.1 : les générations extrémales de C sont formées des mesures $\underline{\mu}(S_x + d\omega)$ qui sont markoviennes $\underline{\mu}$ l'étant. De plus on peut alors trouver toutes les mesures markoviennes de C.

1. 3. *Proposition.*

μ *est markovienne si et seulement si* α *est de la forme*

$\alpha(dx_1, dx_2) = e^{2m\, x_1 x_2}\, \alpha_1(dx_1)\, \alpha_2(dx_2)$, α_1 *et* α_2 *étant des mesures sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : la mesure $\underline{\mu}^x = \underline{\mu}(S_x + d\omega)$ étant markovienne, si on pose $d^x = \mathcal{J}(\underline{\mu}^x)$, d^x est décomposée d'après la proposition 0.4 ; on peut ici à l'aide des formules (2.6.1) et (1.7.1) de [4] établir que :

$$d_{s,t}(y, z) = \exp - 2\, m\, x_1\, x_2 \quad \psi_t^{-,x}(z) \quad \psi_s^{+,x}(y) \quad \text{où :}$$

$$\psi_t^{-,x}(y) = \exp - m\, (e^{2mt}\, x_1^{\,2} + 2y\, x_1\, e^{mt})$$

$$\psi_s^{+,x}(z) = \exp - m\, (e^{-2ms}\, x_2^2 + 2\, z\, x_2\, e^{-ms})$$

Soit $d = \mathcal{J}(\mu)$; il est donc clair que si α est de la forme indiquée d est décomposée. Réciproquement supposons d décomposée et posons, s,t, étant fixés :

$$\beta(dx_1, dx_2) = e^{-2m\, x_1\, x_2} \exp -m\left(x_1^2\, e^{2m\, t} + e^{-2m\, s}\, x_2^2\right) \alpha(dx_1, dx_2) \;;$$

$d_{s,t}$ est (à des coefficients près) la transformée de Laplace de β ; $d_{s,t}$ étant un produit tensoriel il en est de même de β d'où le résultat.

§ 2 REPRESENTATION INTEGRALE LORSQUE P EST QUELCONQUE.

2.0. Rappellons les éléments de la théorie de la représentation intégrale de G. Choquet qui nous seront utiles pour la suite ; soit Γ un cône convexe saillant, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables dans un espace localement convexe ; pour tout élément x de Γ il existe une mesure conique maximale unique $\mathcal{M}$ sur Γ de résultante x ; de plus pour tout chapeau K de Γ contenant x, $\mathcal{M}$ provient d'une probabilité de Radon sur K, portée par les génératrices extrémales de K (Ce théorème est indiqué dans [9] § 11 n° 37 ; pour le § 3 on utilisera plutôt [5] § 30)

Etant donné un espace topologique X (complètement régulier) on notera $\mathcal{M}_b^+(X)$ le cône des mesures positives bornées sur la tribu borélienne de $X^{(*)}$, muni de la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire la topologie faible définie par la dualité avec $\mathcal{C}_b(X)$, espace des fonctions continues bornées sur X. On posera $W = \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

2.1. *THEOREME.*

C est un sous-cône fermé et réticulé de $\mathcal{M}_b^+(W)$; C est métrisable et réunion de ses chapeaux.

Démonstration : une mesure μ appartient à C si et seulement si elle vérifie :

$$(Q) \quad \forall F \in \mathcal{C}_b^+(W),\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \int_W F(\omega - f)\,\mu(d\omega) = \int_W a(f,\omega)\,F(\omega)\,\mu(d\omega)$$

(*) dans les exemples qui suivent X est polonais et donc $\mathcal{M}_b^+(X)$ est composé de mesures de Radon.

Montrons que (Q) équivaut à :

(Q') $\forall F \in \mathcal{C}_b^+(W)$, f $\int a(f, \omega)\, F(\omega)\, \mu(d\omega) \leqslant \int F\,(\omega - f)\, \mu(d\omega)$;

pour cela on remarque que $a(f, \omega)$ est une fonction continue de la variable ω qui possède la propriété de cocycle multiplicatif :

$$\forall\, f_1, f_2, \omega \quad a(f_1 + f_2, \omega) = a(f_1, \omega)\; a(f_2, \omega + f_1).$$

D'autre part l'égalité (Q') s'étend, d'après le théorème de Fatou, au cas où F n'est pas supposée bornée ; en particulier si on pose

$$F(\omega) = a(-f, \omega + f)\, \psi(\omega + f), \quad \text{où } \psi \in \mathcal{C}_b^+(W),$$

d'après l'égalité de cocycle, (Q') s'écrit :

$$\int_W \psi(\omega + f)\, \mu(d\omega) \leqslant \int a(-f, \omega)\, \psi(\omega)\, \mu(d\omega)$$

et donc (Q') implique (Q). Pour montrer que C est fermé il suffit maintenant d'utiliser (Q') en remarquant que l'application :

$$\mu \longmapsto \int_W a(f, \omega)\, F(\omega)\, \mu(d\omega) \quad \text{est s.c.i. pour } F \in \mathcal{C}_b^+(W)$$

d'après le théorème de Fatou et la continuité de $a(f, .)$

b) Soient μ_1 et $\mu_2 \in C$ et $\mu = \mu_1 + \mu_2$. D'après le théorème de Radon - Nikodym on peut écrire $\mu_i = F_i\, \mu$ $i = 1, 2$ et comme μ_i et μ ont même module de quasi-invariance, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a pour μ-presque tout ω :

$F_i(\omega + f) = F_i(\omega)$; si on pose : $G = \sup\,(F_1, F_2)$, on a donc aussi presque partout $G(\omega + f) = G(\omega)$; on en déduit que la mesure $G\mu$ est dans C ; c'est la borne supérieure de μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{M}_b^+(W)$ et donc aussi pour l'ordre propre de C.

c) C est métrisable ; en effet W étant un espace polonais $\mathcal{M}_b^+(W)$ est polonais (cf [3] n° 5 - 4)

d) C étant fermé dans $\mathcal{M}_b^+(W)$, pour démontrer que C est réunion de ses chapeaux (bien coiffé), il suffit de démontrer que $\mathcal{M}_b^+(W)$ est bien coiffé. La démonstration suivante est indiquée dans [3] exercice 5 - 10 : soit f une fonction s.c.i sur W à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ qui est bornée inférieurement sur W et telle que pour tout n l'ensemble $f^{-1}([0,n])$ soit compact ;

alors l'ensemble $K_f = \{\mu \in \mathcal{M}_b^+(W) \mid \mu(f) \leq 1\}$ est un chapeau : en effet K_f est fermé et d'autre part si a est la borne inférieure de f, les mesures de K_f ont leur masse majorée par $\frac{1}{a}$ et sont portées à $\frac{1}{an}$ près par $f^{-1}([0, n])$; donc K_f est compact d'après le critère de Prokhorov (cf [3] n° 5,5) ; enfin μ étant donnée on peut former une fonction f telle que $\mu \in K_f$ de la manière suivante : supposant μ de masse 1, soit K_n une suite croissante de compacts de W tels que K_n porte μ à $\frac{1}{2^{2n}}$ près il suffit de poser : $f = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \varphi_n$, où φ_n est la fonction caractéristique du complémentaire de K_n.

Remarque sur la démonstration.

En utilisant (Q') on peut montrer que la quasi-invariance par les translations d'une partie dense de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec le module $a(f,\omega)$ implique la quasi-invariance par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; ceci permet d'obtenir des désintégrations de mesures quasi-invariantes en mesures quasi-invariantes de même module (cf [16]).

Dans le cas où $P(x) = \frac{m^2}{2} x^2$, on a vu que C était isomorphe à $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$. Dans le cas général la proposition qui va suivre précise la structure du cône C ; posons $W_{s,t} = \mathcal{C}([s,t])$; on utilisera :

2. 2 *LEMME.*

$\mathcal{M}_b^+(W)$ *est la limite projective topologique du système* $(\mathcal{M}_b^+(W_{s,t}), r_{s,t}^{s',t'})$, $r_{s,t}^{s',t'}$ *désignant l'application canonique :*

$$\mathcal{M}_b^+(W_{s',t'}) \longrightarrow \mathcal{M}_b^+(W_{s,t}) \quad \text{pour} \quad [s,t] \subset [s',t'].$$

Démonstration : D'après le théorème de Kolmogorov il est clair que $\mathcal{M}_b^+(W)$ est limite projective ensembliste de $\mathcal{M}_b^+(W_{s,t})$. D'autre part étant donné une base d'ouverts $\mathcal{O}$ de W, la topologie étroite de $\mathcal{M}_b^+(W)$ est la moins fine de celles qui rendent s.c.i les applications $\mu \longmapsto \mu(U)$ pour tout $U \in \mathcal{O}$ (cf [14]). Or, si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts qui sont image réciproque canonique d'un ouvert d'un espace $W_{s,t}$, la limite projective des topologies de $\mathcal{M}_b^+(W_{s,t})$ est moins fine que celle de $\mathcal{M}_b^+(W)$ et possède la propriété précédente. D'où le résultat.

2. 3 *Proposition.*

C est limite projective topologique d'une suite de cônes isomorphes à $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{C}_o^\infty([s,t])$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $[s,t]$, nulles en s et t et $a_{s,t}$ la fonction sur $\mathcal{C}_o^\infty([s,t]) \times W_{s,t}$ définie par :

$$\log a_{s,t}(f,\omega) = \omega(a)f'(a) - \omega(b)f'(b) + \int_a^b [(\omega(t) + \tfrac{1}{2} f(t))f''(t) - P(\omega(t)+f(t)) + P(\omega(t))]\,dt$$

et soit $C_{s,t}$ le cône des mesures bornées positives sur $W_{s,t}$ qui sont quasi-invariantes par les translations de $\mathcal{C}_o^\infty([s,t])$ avec le module $a_{s,t}$. Dans [13] (démonstration de la proposition 11) il est montré que si $\mu \in C$ alors $\mu_{[s,t]} \in C_{s,t}$ et de la même manière on démontre que le système $(C_{s,t}, r_{s,t}^{s',t'})$ est projectif ; $C_{s,t}$ étant muni de la topologie étroite le lemme 2.2 implique que C est la limite projective topologique de ce système. Pour terminer on établit que $C_{s,t}$ est topologiquement isomorphe à $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$, cet isomorphisme étant décrit par les formules suivantes (cf [13] proposition 9 et sa démonstration) : désignons pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $\gamma_{s,t}^{x_1,x_2}$ la loi sur $W_{s,t}$ d'un mouvement brownien prenant la valeur x_1 au temps, s et la valeur x_2 au temps t [on peut définir $\gamma_{s,t}^{x_1,x_2}$ par sa transformée de Fourier comme dans [13] ou bien désintégrer la loi du mouvement brownien habituel par rapport à l'application (X_s,X_t)], et définissons la probabilité ν_x par :

$$(1) \quad \nu_x(d\omega) = I_x^{-1} \exp - \int_s^t P(\omega(u))\, du.\ \gamma_{s,t}^{x_1,x_2}(d\omega),$$

I_x étant la constante de normalisation ; alors toute mesure ν de $C_{s,t}$ se représente de manière unique sous la forme :

$$(2) \quad \nu = \int_{\mathbb{R}^2} \nu_x\, \beta\,(dx) \quad \text{où } \beta \text{ est une mesure sur } \mathbb{R}^2, \text{ et } \beta = (X_s, X_t)\nu .$$

<u>Remarques</u> - on pourrait remplacer $\mathcal{C}_o^\infty([s,t])$ par $\mathcal{D}(]s,t[)$

- pour $\nu = \mu_{[s,t]}$ on peut déduire la formule (2) de la formule $III_{\rho,o}$ du théorème 7 de [12] et donc aussi d'après la proposition 0-5 pour toute mesure $\mu_{[s,t]}$ avec $\mu \in C$.

§ 3 ETUDE DU CONE D ; GENERATRICES EXTREMALES DE C.

La proposition 0-5 amène naturellement à l'étude du cône D.

La régularité des éléments de D va découler des deux énoncés qui suivent :

LEMME. 3-1

Soit A un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{L}_A = \{f \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid A(f) = 0\}$. *Sur* $\mathcal{L}_A$ *la topologie des distributions coïncide avec celle de* $\mathcal{C}^\infty(X)$ *(et donc aussi avec la topologie de* $L^1_{loc}(X)$*).*

Ce lemme est une conséquence du théorème du graphe fermé (voir Malgrange [8] prop 2 p. 331). Pour deux groupes de variables il admet l'analogue suivant :

LEMME. 3-2.

Soit A (resp : B) un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert X (resp : Y) de $\mathbb{R}^n$ *(resp :* $\mathbb{R}^p$*) et* $\mathcal{L}_{A,B} = \{T \in \mathcal{D}'(X \times Y) \mid A_x T = 0 \; B_y T = 0\}$(*)
Toute distribution de $\mathcal{L}_{A,B}$ *est une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *et sur* $\mathcal{L}_{A,B}$ *les topologies de* $\mathcal{D}'(X \times Y)$ *et de* $\mathcal{C}^\infty(X \times Y)$ *coïncident.*

Démonstration : Soient $\varphi_1 \in \mathcal{D}(X)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(Y)$; alors l'application : $\varphi_2 \longmapsto T(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ est une distribution S_{φ_1} sur Y qui satisfait à $B\, S_{\varphi_1} = 0$; par l'hypoellipticité de B, S_{φ_1} provient d'une fonction de $\mathcal{C}^\infty(Y)$ que l'on notera $T(\varphi_1, y)$; l'application : $\varphi_1 \longmapsto S_{\varphi_1}$ est continue :

(*) $A_x(T_1 \otimes T_2) = A\,T_1 \otimes T_2 \quad B_y(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes B\,T_2 \quad (T_1 \in \mathcal{D}'(X) \; T_2 \in \mathcal{D}'(Y))$

$\mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(Y)$ elle est donc d'après le lemme 3.1 continue : $\mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(Y)$; en particulier l'application $\varphi_1 \longmapsto T(\varphi_1, y)$ est une distribution V_y sur X ; il est immédiat que $A\,V_y = 0$ et donc V_y est une fonction de $\mathcal{E}^\infty(X)$ notée $V_y(x)$; de plus l'application : $y \longmapsto V_y$, $Y \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$ est $\mathcal{E}^\infty$ pour la topologie faible de $\mathcal{D}'(X)$ donc aussi d'après la propriété de Montel de $\mathcal{D}'(X)$ pour la topologie forte de $\mathcal{D}'(X)$ (cf [15] chap III § 2) ou enfin d'après le lemme 3.1 pour la topologie de $\mathcal{E}^\infty(X)$; ceci implique que $(x,y) \longmapsto V_y(x)$ est une fonction de $\mathcal{E}^\infty(X,Y)$ et T provient évidemment de cette fonction. Enfin la dernière partie du lemme s'obtient en appliquant à nouveau 2 fois le lemme 3.1.

<u>3.3</u> le lemme 3.1 permet également de compléter la démonstration de la proposition 0.1 : $P_t(x, dy)$ étant un semi-groupe de noyaux (cf [12] théorème 2) on a :

$\forall x$ pour presque tout y $p_{s+t}(x,y) = \int p_s(x, z)\, p_t(z, y)\, dz$; soit K_n une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}$ de fonctions caractéristiques φ_n. D'après 0.1 si on pose :

$$q^n_{s,t}(x, y) = \int p_s(x, z)\, \varphi_n(z)\, p_t(z, y)\, dz,$$

$q^n_{s,\cdot}(x,\cdot)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui satisfait à $(\frac{\partial}{\partial t} - L_y)\, q^n = 0$; d'autre part pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, $p_{s+t}(x,y)$ est la limite croissante de $q^n_{s,t}(x,y)$; l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - L^*_y$ étant hypoelliptique le lemme 3.1 implique la convergence partout et donc :

$$\forall x\ \forall y\quad p_{s+t}(x, y) = \lim\ q^n_{s,t}(x, y) = \int p_s(x, z)\, p_t(z, y)\, dz$$

<u>*Proposition 3.4*</u>

Tout élément d du cône D admet une version $\bar{d}_{s,t}(x, y)$ appartenant à $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ et qui vérifie les équations :

$$\begin{cases} (E^-) & -\dfrac{\partial \bar{d}}{\partial s} + L_x \bar{d} = 0 \\ (E^+) & \dfrac{\partial \bar{d}}{\partial t} + L_y \bar{d} = 0 \end{cases}$$

$(\bar{\varepsilon})$ $\qquad \forall s_1 \leqslant s_2 < 0 \quad \forall t_1 \geqslant t_2 > 0. \quad \forall_{x,y}$

$$\bar{d}_{s_2,t_2}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{d}_{s_1,t_1}(u,v)\, P_{s_2-s_1}(x,du)\, P_{t_1-t_2}(y,dv)$$

Démonstration. On va d'abord montrer que d définit une distribution sur $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ qui satisfait à (E^-) et (E^+). D'après un lemme de Doob il existe une version $d_{s,t}(x,y)$ de d qui est mesurable sur $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$; d'autre part $\mu_{\{s,t\}}(d_{s,t})$ est fini et ne dépend pas de s et t ; à l'aide du théorème de Fubini et du lemme 0.3 on en déduit que $d_{s,t} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ et $d_{s,t}(x,y)$ définit bien une distribution. D'après l'équation (ε) (cf o-4) et les équations satisfaites par p_t cette distribution satisfait à (E^-) et (E^+) et provient donc d'après le lemme 3.2 d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$: $\bar{d}_{s,t}(x,y)$. Enfin pour établir l'équation $(\bar{\varepsilon})$ on procède comme au n° 3.3 : φ_n étant les fonctions caractéristiques d'une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}^2$ si on pose s_o, t_o étant fixés pour $s > s_o$, $t < t_o$.

$$q^n_{s,t}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} p_{s-s_o}(x,u)\, p_{t_o-t}(y,v)\, \varphi_n(u,v)\, \bar{d}_{s_o,t_o}(u,v)\, du\, dv,$$

, $q^n \in \mathcal{C}^\infty(]s_o, 0[\times]0, t_o[\times \mathbb{R}^2)$, satisfait à (E^-) et (E^+) et tend en croissant presque partout vers $\bar{d}_{s,t}(x,y)$ donc partout d'après la fin du lemme 3.2.

Munissons D de la topologie initiale associée aux applications canoniques $D \longrightarrow L^1(\mu_{\{s,t\}})$; alors :

Proposition 3.5.

D est métrisable complet et l'isomorphisme $\mathcal{J} : C \longrightarrow D$ est bicontinu.

<u>Démonstration :</u> Soit s_n une suite décroissante non bornée et t_n une suite croissante non bornée ; d'après l'équation (ε) on peut se restreindre à la famille dénombrable d'indices (s_n, t_n) pour définir la topologie de D d'où le caractère métrisable complet. Désignons par μ^n et μ des mesures de C et $d^n = \mathcal{J}(\mu^n)$, $d = \mathcal{J}(\mu)$; si $d^n \longrightarrow d$ alors pour tout (s, t), $\mu^n_{[s,t]} \longrightarrow \mu_{[s,t]}$ étroitement donc d'après le lemme 2.2 $\mu^n \longrightarrow \mu$. Réciproquement si $\mu^n \longrightarrow \mu$, $\mu^n_{\{s,t\}} \longrightarrow \mu_{\{s,t\}}$ étroitement ; on en déduit que $\bar{d}^n \longrightarrow \bar{d}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ donc aussi, d'après le lemme 3.2, dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$; comme de plus $\mu_{\{s,t\}}(\bar{d}^n_{s,t})$ converge vers $\mu_{\{s,t\}}(d_{s,t})$ la suite $\bar{d}^n_{s,t}$ est $\mu_{\{s,t\}}$ équiintégrable et converge dans $L^1(\mu_{\{s,t\}})$ (cf [9] § 2 n° 2,1)

Passons maintenant à l'étude des génératrices extremales de D ; on remarque l'analogie qui existe entre D et le cône des fonctions positives séparément harmoniques sur un produit d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ considéré par divers auteurs ; on rappelle en particulier que les génératrices extrémales de ce cône sont formées de produits tensoriels de fonctions harmoniques (cf [7]). On utilisera la remarque suivante : lorsqu'on fixe les variables s et x la fonction $\bar{d}_{s,\cdot}(x,\cdot)$ est un élément du cône H défini comme suit :

<u>Définition :</u>

On note H le cône des fonctions $h(t,y)$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, positives qui sont solution de (E^+) : $\frac{\partial h}{\partial t} + L_y h = 0$; on munit H de la structure uniforme faible définie par les formes linéaires $h \longrightarrow \langle \varphi, h \rangle$ où φ est un élément quelconque de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

<u>*Proposition 3.6.*</u>

H est un cône complet, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables.

<u>Démonstration</u> : - Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et si F est un filtre de Cauchy sur H, $\lim_{F} \langle h, \varphi\rangle$ existe ; on définit ainsi une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}$ donc une distribution qui satisfait évidemment à (E^+) ; par l'hypoellipticité de $\frac{\partial h}{\partial t} + L_y$, cette distribution est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ d'où le caractère complet de H.

- pour toute fonction $h \in H$ on construit aisément une fonction p continue et > 0 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ telle que $\langle p, h\rangle = \int p(t, y)\, h(t,y)\, dt\, dy \leq 1$; on va montrer que $K = \{k \in H \mid \langle p, k\rangle \leq 1\}$ est un chapeau de H ; d'abord les fonctions de K étant uniformément d'intégrales bornées sur chaque compact de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, K est borné dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donc aussi dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ (cf lemme 3.1) donc relativement compact dans ce dernier espace (par la propriété de Montel) ; d'autre part le lemme de Fatou entraine que K est fermé donc compact dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et donc K est aussi compact et métrisable dans H.

- le cône H peut-être considéré comme un cône de fonctions harmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel (cf [1]) ; il est connu que ces cônes sont réticulés pour leur ordre propre (la démonstration que l'on trouve dans le livre de Brelot [2] chapitre II § 8 pour le cas classique se transpose sans difficulté : on n'a besoin que d'une base d'ouverts réguliers pour le problème de Dirichlet).

Le lemme suivant précise les liens entre l'équation (E^+) et l'équation

$$(\overline{\varepsilon^+}) \quad \forall s_2 \leq s_1 \quad \forall y \quad h(s_2, y) = \int_{\mathbb{R}} h(s_1, v)\; P_{s_1 - s_2}(y, dv) .$$

<u>*LEMME. 3.7.*</u>

Si $k \in H$ et satisfait à l'équation $(\overline{\varepsilon^+})$ et si $h \in H$ et $h \leq k$, alors h vérifie $(\overline{\varepsilon^+})$.

<u>Démonstration</u> : on utilise la construction de μ donnée dans [12] : un instant initial $t_0 > 0$ étant fixé on peut écrire :

(1) $\mu_{[t_o,+\infty[} = \int_{\mathbb{R}} P_x^{t_o}\ \mu_o(dx)$, $P_x^{t_o}$ étant la probabilité portée par $\mathcal{C}_x([t_o, +\infty[)$, (espace des fonctions continues sur $[t_o, +\infty[$ valant x en t_o) caractérisée par :

(2) $B_t = X_t + \int_{t_o}^{t} \zeta(X_s)\, ds$ est un $(\mathbb{P}_x^{t_o}, \mathcal{F}_{t_o,t})$ mouvement brownien ; considérons pour toute fonction $h(t,y)$ deux fois continûment dérivable, l'intégrale stochastique :

(3) $M_t^h = \int_{t_o}^{t} \frac{\partial h}{\partial y}(s, X_s)\, dB_s$ (*); d'après la formule de Ito on a :

(4) $P_x^{t_o}$- p.s. $h(t, X_t) = h(t_o, x) + M_t^h + \int_{t_o}^{t} A\, h(X_s)\, ds$ avec

$A = \frac{\partial}{\partial t} + L_y$; si $h \in H$ la dernière intégrale est nulle ; $h(t, X_t)$ est donc une martingale locale positive pour la suite de $\mathcal{F}_{t_o,t}$ temps d'arrêt T_n donnés par :

$T_n(\omega) = \mathrm{Inf}(s > t_o \mid |X_s(\omega)| \geq n)$, donc une surmartingale ce qui entraîne:

(5) $E_x^{t_o}(h(t, X_t)) \leq h(t_o, x)$ ($E_x^{t_o}$ étant l'espérance définie par la probabilité $P_x^{t_o}$) ; mais en remplaçant h par $k - h$ dans ce raisonnement on établit l'inégalité inverse ; d'où l'égalité dans (5), qui équivaut d'après (1) à $(\bar{\varepsilon}^+)$ puisque t_o et t sont arbitraires.

Pour continuer on a besoin d'une opération de restriction à certains sous-cônes de H de mesures coniques sur H ; une telle opération est facile à mettre en place en utilisant simplement le caractère bien coiffé de H. On notera $M(H)$ le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions sur H qui soit réticulé et contienne les formes linéaires continues sur H ; une mesure conique est une forme linéaire positive sur $M(H)$ et, H étant faiblement complet,

---

(*) On peut se référer à [11] pour une présentation des intégrales stochastiques.

toute mesure conique sur H a un résultant dans H (cf [5]). On notera B la tribu sur H engendrée par les formes linéaires continues sur H.

LEMME. 3.8.

Soit A un sous-cône de H appartenant à B, μ une mesure conique sur H ; il existe une unique mesure conique μ^A possédant la propriété suivante : si μ provient d'une mesure de Radon λ portée par un chapeau K de H, μ^A provient de λ^A, restriction de λ à A ; on a $\mu^A \leq \mu$ et si $\mu^A = c\,\mu$ pour tout A alors μ provient d'une mesure de Dirac.

Démonstration : on va montrer que si μ provient de λ et λ' alors

(1) $\lambda'(f) = \lambda(f)$ pour toute fonction f positivement homogène, bornée sur chaque chapeau et B-mesurable ; on sait déjà que (1) a lieu pour $f \in M(H)$. Soit H_1 une base de H définie par $H_1 = \{h \mid \ell(h) = 1\}$, ℓ étant une forme linéaire continue positive sur H et pour toute fonction φ sur H_1 soit $\hat{\varphi}$ l'unique prolongement positivement homogène de φ à H. Soit E l'espace des restrictions à H_1 des fonctions de M(H) et F l'espace des fonctions φ bornées sur H_1, telles que $\hat{\varphi}$ soit B-mesurable et $\lambda(\hat{\varphi}) = \lambda'(\hat{\varphi})$. Par application de la remarque qui suit le théorème 1.20 de [9], on obtient que F contient toutes les fonctions bornées et mesurables par rapport à la tribu engendrée par E c'est-à-dire "$B \cap H_1$". D'où (1) lorsque f est bornée sur H_1 et le cas général en écrivant pour $f \geq 0$: $f = \sup_n(\inf(f, n\,\ell))$. On pose alors pour $f \in M(H)$ $\mu^A(f) = \lambda(\chi_A\, f)$ et le reste de la proposition est immédiat (on peut comparer cette méthode de restriction avec [5] prop 30.8)

THEOREME. 3.9

Les génératrices extrémales de C sont formées de mesures markoviennes.

<u>Démonstration :</u> d'après la proposition 0.5, il suffit de montrer que les génératrices extrémales de D sont formées d'éléments décomposés. Soit $d \in D$ et A un sous cône de H B-mesurable ; on va définir un élément d^A de D de la manière suivante : soit d la version $\mathcal{C}^\infty$ de d ; pour tout $(s,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$, $(t, y) \longmapsto d_{s,t}(x,y)$ est un élément de H noté $h_{s,x}$, représenté par une unique mesure conique maximale $\mathcal{M}_{s,x}$; on considère la mesure conique $\mathcal{M}^A_{s,x}$ (voir lemme 3.8) dont le résultant $h^A_{s,x}$ est dans H et on pose :

$d^A_{s,t}(x, y) = h^A_{s,x}(t,y)$. Montrons que d^A satisfait à l'équation (ε) ; $h^A_{s,x}$ étant majoré par $h_{s,x}$ on a d'abord pour $t' \geq t$ d'après le lemme 3.7 :

(1) $\forall$ s, x, t, y, t' $\quad h^A_{s,x}(t, y) = \int h^A_{s,x}(t', v)\ P_{t'-t}(y, dv).$

D'autre part d'après $(\tilde{\varepsilon})$ (voir proposition 3.4) on a pour $s' \geq s$

$\forall$ s, x, t, y, s' $\quad h_{s,x}(t, y) = \int h'_{s',u}(t, y)\ P_{s-s'}(x, du)$;

toute forme linéaire ℓ continue sur H étant donnée par $\ell(h) = \langle \varphi, h \rangle$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ on a aussi d'après le théorème de Fubini :

(2) $\quad \ell(h_{s,x}) = \int \ell(h_{s',u})\ P_{s-s'}(x, du)$; (2) implique que pour toute fonction $f \in M(H)$:

(3) $\mathcal{M}_{s,x}(f) = \int \mathcal{M}_{s',u}(f)\ P_{s-s'}(x, du)$, par le raisonnement suivant : on remarque que l'intégrale

$I(f) = \int \mathcal{M}_{s',u}(f)\ P_{s-s'}(x, du)$ existe ; en effet cette intégrale existe d'après (2) lorsque f est une forme linéaire et dans le cas général celà résulte des propriétés suivantes :

$u \longmapsto \mathcal{M}_{s',u}(f)$ est une fonction borélienne (voir le théorème 30.1 VII de [5]) et $|f|$ est majorée par une forme linéaire continue (voir la démonstration de la proposition 30.13 de [5]) ; $f \longmapsto I(f)$ est une mesure conique, maximale comme intégrale de mesures coniques maximales (cf [6] corollaire 30) dont le résultant est $h_{s,x}$ d'après (2) ; d'où (3)

par unicité de la représentation intégrale de $h_{s,x}$. Par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 3.8 on déduit de (3) la même égalité pour les mesures $\mathcal{N}^A_{s,x}$ donc aussi :

(4) $$h^A_{s,x}(t, y) = \int h^A_{s',u}(t, y)\, P_{s-s'}(x, du).$$

La conjonction de (1) et (4) entraîne que d^A satisfait à (ε) ; il est alors clair que $d^A \in D$ et que $d^A \prec d$ ($\prec$ désignant l'ordre propre de D) Supposons maintenant que d appartienne à une génératrice extrémale de D ; alors nécessairement $d^A = c\, d$, $c \in \mathbb{R}$ et en particulier :

(5) $h^A_{s,x} = c\, h_{s,x}$ pour tous s,x ; il en résulte d'abord que $h_{s,x}$ appartient à une génératrice extrémale $\Delta_{s,x}$ de D (en effet d'après le lemme 3.8, $\mathcal{N}^A_{s,x}$ provient d'une mesure de Dirac et $\mathcal{N}^A_{s,x}$ est maximale) ; d'autre part s_o, x_o étant fixés on a $\Delta_{s,x} = \Delta_{s_o,x_o}$: car dans le cas contraire pour tout A contenant Δ_{s_o,x_o} et disjoint de $\Delta_{s,x}$ on aurait :

$h^A_{s_o,x_o} = h_{s_o,x_o}$ et $h^A_{s,x} = 0$. Il existe donc une fonction $\varphi(s,x)$ telle que

$$h_{s,x} = \varphi(s,x)\, h_{s_o,\, x_o}\ ,$$ ce qui revient à dire que d est décomposé .

<u>Remarque :</u> la réciproque du théorème 3.9 est fausse ; en effet, $d_{s,t}$ peut se décomposer sous la forme $\varphi^+_s \otimes \varphi^-_t$ sans être extrémale dans D (pour celà il est nécessaire en effet que φ^-_t soit extrémale dans le cône des $(\mu, \mathcal{F}^-_t)$ martingales positives (resp : $\varphi^+_s, \mathcal{F}^+_t$))

REFERENCES

[1] J.M. BONY :
Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de théorie du potentiel - Cours au C.I.M.E (Juin 1970)

[2] M. BRELOT :
Eléments de la théorie classique du potentiel (C.D.U Paris 4ème édition)

[3] BOURBAKI :
Intégration sur les espaces topologiques séparés.

[4] P. COURREGE et P. RENOUARD :
Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et théorie quantique des champs en dimension $d = 1$. Astérique n° 22-23.

[5] G. CHOQUET :
Lectures on analysis ; II : representation theory.

[6] G. CHOQUET :
Les cônes faiblement complets dans l'analyse. Proceedings of the international congress of mathematicians (1962) p.317.

[7] K. GOWRISANKARAN :
Limites fines et fonctions doublement harmoniques - C.R.A.S Paris, tome 262 (14/2/1966)

[8] B. MALGRANGE :
Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution - Ann. Inst. Fourier, tome VI (1955-56).

[9] P.A. MEYER :
Probabilités et potentiel.

[10] J. NEVEU :
Bases mathématiques du calcul des probabilités.

[11] P. PRIOURET :
Ecole d'été de probabilités de St Flour 1973 - Lectures notes in mathematics. Vol. 390.

[12] P. PRIOURET et M. YOR :
Processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - Astérisque n° 22-23.

[13] G. ROYER :
Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ - A paraître.

[14] Séminaire SCHWARTZ 1969/70 :
Applications radonifiantes, exposé 3.

[15] L. SCHWARTZ :
Théorie des distributions.

[16] M. YOR :
Etude de mesures de probabilités sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ quasi-invariantes par les translations de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ – A paraître

---

M. G. ROYER et M. YOR
Equipes d'Analyse et de Probabilités
E.R.A au C.N.R.S n° 294 et n° 1

UNIVERSITE
Pierre et Marie Curie
(Université Paris VI)
4, Place Jussieu
Tour 46 - 4ème étage - 46/0
75230 - PARIS - Cédex 05

Avril 1975 - Préprint n° 40

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES OPTIONNELLES ET UNE SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

par Marc YOR

INTRODUCTION

L'origine de ce travail a été la remarque suivante : si X est une martingale locale quasi continue à gauche, et dont les sauts sont uniformément bornés, on peut associer à X au moins deux formules exponentielles intéressantes, à savoir l'exponentielle de C. Doléans

$$E(X)_t = \exp\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t\}\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$$

et une seconde exponentielle

$$E_\infty(X)_t = \exp\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t - \int\nu_t(dx)(e^x-1-x)\}$$

ν étant la " mesure de Lévy" de X, c'est à dire la projection (duale !) prévisible de la mesure $\eta(dt\times dx)=\sum_{s>0} I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\varepsilon_s(dt)\varepsilon_{\Delta X_s}(dx)$.
On construit ci-dessous une suite de martingales locales $E_n(X)$ telle que $E_1(X)=E(X)$ et, au moins formellement, $E_n(X)\xrightarrow[n\to\infty]{} E_\infty(X)$. De plus, ces martingales locales permettent de caractériser le processus croissant $\langle X^c,X^c\rangle$ et la mesure prévisible ν .

On donne également une nouvelle expression de la formule d'Ito associée à X - sous une condition d'intégrabilité - où intervient de manière naturelle une intégrale stochastique optionnelle.

NOTATIONS.

Les notations utilisées sont principalement celles du " Cours sur les intégrales stochastiques" de P.A.Meyer, qui figure dans ce volume (référence [5] de la bibliographie). En particulier, on considère les espaces $\underline{\underline{M}}$ (martingales de carré intégrable), $\underline{\underline{W}}$ (martingales à variation intégrable), $\underline{\underline{L}}$ (martingales locales), $\underline{\underline{V}}$ (processus à variation finie)... définis à partir d'un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, vérifiant les conditions habituelles.

On dit que X vérifie localement la propriété (P) (le long de la suite (T_n)) s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt, $T_n \uparrow \infty$ p.s., telle que pour tout n $X^{T_n} = X_{\cdot \wedge T_n}$ vérifie (P). Ainsi un processus X est dit localement borné dans L^p s'il existe des $T_n \uparrow \infty$ p.s. et tels que

$$\sup_{0 \leq s < \infty} E[\ |X_{s \wedge T_n}|^p\ ] < \infty$$

Par exemple, $\underline{\underline{M}}_{loc}$ est l'espace des martingales locales, localement de carré intégrable. Enfin, la notation suivante permet de simplifier de nombreuses égalités entre semi-martingales : si X et Y sont adaptés, on dit qu'ils sont <u>associés</u> si $X-Y \in \underline{\underline{L}}$, et on note $X \equiv Y$ ($\underline{\underline{L}}$) (X est <u>congru</u> à Y modulo $\underline{\underline{L}}$) , ou simplement $X \equiv Y$.

1. UN LEMME FONDAMENTAL ET QUELQUES CONSEQUENCES

1.1. Les intégrales stochastiques optionnelles apparaîtront très souvent dans tout le travail. Montrons tout d'abord que l'extension de l'intégrale stochastique aux intégrands optionnels faite en [5] est "maximale".

Rappelons l'inégalité générale de Kunita-Watanabe obtenue en [5] : si H et K sont deux processus $\underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurables, et $M,N \in \underline{\underline{M}}$, on a

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||d[M,N]|_s \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d[N,N]_s\ \right)^{1/2} \text{ p.s.}$$

En particulier, si H est un processus <u>mesurable</u> vérifiant $E(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s) < \infty$, l'application $N \longrightarrow E(\int_0^\infty H_s d[M,N]_s)$ est continue sur $(\underline{\underline{M}}, \|\cdot\|_2)$, et donc il existe une unique martingale de carré intégrable, notée H.M, telle que

$$\forall\ N \in \underline{\underline{M}}\ ,\ E(\ [(H \cdot M),N]_\infty\ )\ = E(\ \int_0^\infty H_s\ d[M,N]_s\ )$$

Pour continuer, nous énonçons le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> . L'application de projection optionnelle $H \longrightarrow {}^1H$ définie sur les processus mesurables bornés se prolonge de façon unique en une application linéaire contractante de $(L_m^2(M),\ {}_M\|\cdot\|_2\ )$ dans $(L_o^2(M),\ {}_M\|\cdot\|_2)$, où

$$L^2_m(M) = \{ H \text{ mesurable} : {}_M\|H\|_2^2 = E(\int_0^\infty H_s^2 \, d[M,M]_s) < \infty \}$$
$$L^2_o(M) = \{ H \text{ optionnel} : {}_M\|H\|_2^2 < \infty \}$$

On note encore $H \longrightarrow {}^1H$ ce prolongement.

Démonstration . Soit H un processus mesurable borné. On a pour tout temps d'arrêt T

$$({}^1H_T)^2 I_{\{T<\infty\}} = (E[H_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T])^2 \leq E[H_T^2 I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T] = {}^1(H^2)_T I_{\{T<\infty\}}$$

D'après le théorème de section optionnel, on a donc $({}^1H)^2 \leq {}^1(H^2)$ sauf sur un ensemble évanescent, et donc ${}_M\|{}^1H\|_2 \leq {}_M\|H\|_2$. Les processus mesurables bornés sont denses dans $L^2_m(M)$, et le lemme est démontré.

Proposition 1 . Soit $H \in L^2_m(M)$. Alors $H\cdot M = {}^1H \cdot M$.

Démonstration . D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, l'application $H \longrightarrow H\cdot M$ définie sur $L^2_m(M)$, à valeurs dans $\underline{\underline{M}}$, est continue (et même contractante). Il en est de même de $H \longrightarrow {}^1H\cdot M$, à l'aide du lemme 1. Il suffit donc de montrer que $H\cdot M = {}^1H\cdot M$ pour H mesurable, borné. Or soit $N \in \underline{\underline{M}}$. Nous avons par définition de $H\cdot M$

$$E([H\cdot M,N]_\infty) = E(\int_0^\infty H_s d[M,N]_s) = E(\int_0^\infty {}^1H_s d[M,N]_s)$$

car le processus à variation intégrable [M,N] est optionnel. Or ceci est l'égalité caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle ${}^1H\cdot M$ ([5], chap.II, déf. 32).

On est ainsi ramené à la théorie de l'intégrale stochastique optionnelle de [5], II.31-35 pour $\underline{\underline{M}}$, et V.19 pour $\underline{\underline{L}}$.

1.2. Comme cela apparaîtra dans la suite dans diverses applications, le lemme suivant permet de résoudre de nombreuses questions liées à la théorie des intégrales stochastiques. Il est dû à Ch. Yoeurp et figure, avec démonstration, dans son article [8] dans ce volume.

Lemme fondamental . Soit $A \in \underline{\underline{V}}$ prévisible, et soit $M \in \underline{\underline{M}}$. Alors $[A,M] = \Delta A\cdot M$. En particulier, [A,M] est une martingale locale.

1.3. Voici deux premières applications de ce lemme fondamental. On commence par une nouvelle démonstration de la formule de M. Pratelli et Ch. Yoeurp ([5], II.37 et V.21).

Proposition 2 . Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$. Alors l'intégrale $\Delta M \cdot M$ et le processus $\langle M,M\rangle$ sont bien définis et

(1) $$\Delta M \cdot M = [M,M] - \langle M,M\rangle \ .$$

Démonstration. On renvoie à [5], V.21 pour le début de la proposition. Pour démontrer (1), on peut évidemment supposer $M^c=0$. Par la caractérisation des intégrales stochastiques optionnelles, il suffit de vérifier que pour toute martingale N bornée

$$[\ [M,M]-\langle N,N\rangle\ ,\ N\ ] \equiv \Delta M \cdot [M,N] \qquad (\underline{\underline{L}})$$

Or le membre de gauche est égal à

$$\Sigma_{s\leq\cdot}\ (\Delta M_s)^2 \Delta N_s - [\langle M,M\rangle,N] \equiv \Sigma_{s\leq\cdot}\ (\Delta M_s)^2 \Delta N_s = \Sigma_{s\leq\cdot} \Delta M_s \Delta[M,N]_s$$

d'après le lemme fondamental. Cela démontre la proposition.

La proposition suivante montre que l'intégrale stochastique optionnelle $H \cdot M$ est la compensée de l'intégrale de Stieltjes $H*M$ (1), lorsque celle-ci existe. L'énoncé est implicite dans la construction de [5]. II.34, mais n'est explicité nulle part dans [5].

Proposition 3 . Soient $M \in \underline{\underline{W}}_{loc}$, H un processus optionnel tel que $\int_0^\cdot |H_s||dM_s|$ soit localement intégrable. Alors $(\ \int_0^\cdot H_s^2\ d[M,M]_s\ )^{1/2}$ l'est aussi, et l'on a

(2) $$H \cdot M = H*M - (H*M)^3$$

(on rappelle que $(\ )^3$ désigne la projection duale prévisible).

Démonstration . M appartenant à $\underline{\underline{W}}_{loc}$ n'a pas de partie martingale continue, de sorte que la première phrase de l'énoncé se réduit à l'inégalité $\Sigma_{s\leq t}\ H_s^2 \Delta M_s^2 \leq (\ \Sigma_{s\leq t}\ |H_s||\Delta M_s|)^2$. Vérifions que $H*M-(H*M)^3$ satisfait à la propriété caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle, c'est à dire que pour toute martingale bornée N

$$[H*M-(H*M)^3,N] \equiv H \cdot [M,N]^{(1)} \quad (\underline{\underline{L}})$$

Or les deux membres diffèrent par $-[(H*M)^3,M]$, et le lemme fondamental s'applique encore.

---

(1). Nous employons la notation * au lieu de $\cdot$ pour les intégrales de Stieltjes, seulement lorsqu'il y a risque de confusion.

2. DIFFERENTES EXPONENTIELLES DE SEMI-MARTINGALES

2.1. Rappelons tout d'abord, pour notation et référence par la suite, le théorème suivant dû à C. Doléans, qui est valable pour tout X appartenant à l'espace $\underline{\underline{S}}_0$ des semi-martingales nulles en 0.

Théorème 1 . Soit $X \in \underline{\underline{S}}_0$. Il existe alors une et une seule semi-martingale $\Lambda = \mathcal{E}(X)$ solution de

$$(e_X) \qquad \Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_{s-} dX_s \ .$$

Elle est donnée par la formule

$$(3) \qquad \mathcal{E}(X)_t = \exp\{ X_t - \tfrac{1}{2} < X^c, X^c >_t \} \prod_{s \leq t} (1+\Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \ .$$

La propriété fondamentale d'une exponentielle est sa multiplicativité. Etudions cette propriété pour $\mathcal{E}$.

Proposition 4. Pour $X, Y \in \underline{\underline{S}}_0$ on a

$$(4) \qquad \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y+[X,Y]) \ .$$

Démonstration . On peut obtenir la formule (4) par calcul direct à partir de la formule (3). On préfère ici appliquer la formule d'Ito à U_tV_t , où $U=\mathcal{E}(X)$, $V=\mathcal{E}(Y)$, ce qui revient à la formule d'intégration par parties $d(UV) = U_-dV + V_-dU + d[U,V]$. Ici on a $dV=V_-dY$, $dU=U_-dX$, $d[U,V] = U_-V_-d[X,Y]$, donc

$$d(UV) = U_-V_-dY + U_-V_-dX + U_-V_-d[X,Y]$$

et UV est donc l'unique solution de $(e_{X+Y+[X,Y]})$, d'où (4).

La proposition 4 permet de définir naturellement l'application bilinéaire $\{ \ , \ \}$ sur $\underline{\underline{S}}_0 \times \underline{\underline{S}}_0$ par

$$\{X,Y\} = X + Y + [X,Y]$$

Une notation d'opération telle que $X \perp Y$ serait d'ailleurs appropriée, car l'opération ainsi définie est associative :

$$X \perp Y \perp Z = X + Y + Z + [X,Y] + [Y,Z] + [Z,X] + \Sigma_{s \leq .} \Delta X_s \Delta Y_s \Delta Z_s \ .$$

On explicite dans la proposition suivante la suite $X^{(n)}$ d'éléments de $\underline{\underline{S}}_0$ déterminée par la relation de récurrence $X^{(1)} = X \in \underline{\underline{S}}_0$, $X^{(n)} = \{ X, X^{(n-1)} \}$ (les puissances de X pour l'opération $\perp$).

Proposition 5 . Pour tout $X \in \underline{\underline{S}}_0$ et $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on a

(5) $\quad X^{(n)} = nX + \frac{n(n-1)}{2} \langle X^c, X^c \rangle + \Sigma_{s \leq \cdot} P_n(\Delta X_s)$ où $P_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$.

Démonstration . Elle se fait par une succession de récurrences faciles. Nous commençons par vérifier la conséquence suivante de (5)

$$\Delta X^{(n)} = Q_n(\Delta X) \quad \text{où } Q_n(x) = (1+x)^n - 1$$

En effet, la formule $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + [X, X^{(n-1)}]$ nous donne la relation de récurrence $Q_n(x) = x + Q_{n-1}(x) + xQ_{n-1}(x)$ avec $Q_1(x) = x$, qui conduit bien à l'expression ci-dessus.

Nous posons ensuite $Y^{(n)} = [X, X^{(n)}]$. La formule $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + [X, X^{(n-1)}]$ nous donne

$$Y^{(n)} = [X,X] + Y^{(n-1)} + \Sigma_{s \leq \cdot} \Delta X_s^2 \Delta X_s^{(n-1)}$$

$$= Y^{(n-1)} + \langle X^c, X^c \rangle + \Sigma_{s \leq \cdot} R_n(\Delta X_s)$$

où $R_n(x) = x^2(1 + Q_{n-1}(x)) = x^2(1+x)^{n-1}$. La solution de cette équation de récurrence est

$$Y^{(n)} = n \langle X^c, X^c \rangle + \Sigma_{s \leq \cdot} T_n(\Delta X_s) \quad \text{où } T_n(x) = x\{(1+x)^n - 1\}$$

car $T_n - T_{n-1} = R_n$. La relation de récurrence sur $X^{(n)}$ devient alors $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + Y^{(n-1)}$, soit

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + X + (n-1) \langle X^c, X^c \rangle + \Sigma_{s \leq \cdot} T_{n-1}(\Delta X_s)$$

dont la solution est (5) , car $P_{n-1} + T_{n-1} = T_n$.

2.2. On donne maintenant une autre démonstration de la forme explicite de la solution d'une équation différentielle stochastique posée et résolue par Ch. Yoeurp ([8] et [5]).

Soit X une semi-martingale spéciale ([5], IV.31), dont la décomposition canonique est $X = X_0 + M + A$ ($M \in \underline{\underline{L}}_0$, $A \in \underline{\underline{V}}_0$ et prévisible[1]). On note $\mathring{X} = X_0 + M_- + A$ la projection prévisible de X. D'après [8] ou [5], si le processus $1 - \Delta A$ ne s'annule pas, il existe une unique semi-martingale spéciale $\Lambda = \mathring{E}(X)$, solution de

$$(\mathring{e}_X) \qquad \Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \mathring{\Lambda}_s dX_s$$

donnée par $\mathring{E}(X) = E(Y)$, où $Y_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{1 - \Delta A_s}$.

1. En réalité, X_0 n'intervient pas.

<u>Proposition 6</u> . $\overset{+}{E}(X) = \frac{E(M)}{E(-A)}$

<u>Démonstration</u> . Avec les notations précédentes, il s'agit de montrer $E(Y)E(-A)=E(M)$. D'après la proposition 4, cela revient à $Y-A-[Y,A] = M$. Or par définition de Y

$$dY - dA - d[Y,A] = \frac{dM+dA}{1-\Delta A} - dA - \frac{d[M,A]+d[A,A]}{1-\Delta A}$$

Nous remplaçons $d[A,A]$ par $\Delta A dA$, et $d[M,A]$ par $\Delta A dM$ (lemme fondamental). Il reste

$$\frac{dM}{1-\Delta A} + \frac{dA}{1-\Delta A} - dA - dM\frac{\Delta A}{1-\Delta A} - dA\frac{\Delta A}{1-\Delta A} = dM$$

Comme tous les processus sont nuls en 0, la proposition est établie.

2.3. L'existence des intégrales stochastiques optionnelles permet de poser le problème de la résolution de l'équation stochastique

$$(\overset{+}{e}_X) \qquad dZ_s = Z_s dX_s \quad .$$

On le résoudra ci-dessous dans une sous-classe de l'espace des semi-martingales spéciales , formée des semi-martingales spéciales X admettant une décomposition canonique $X=X_0+M+A$, où la martingale locale M est <u>quasi-continue à gauche</u>. Nous dirons pour abréger qu'une telle semi-martingale est <u>très spéciale</u>. Il faudra aussi imposer une condition d'intégrabilité.

<u>Proposition 7</u> . Soit $X = X_0+M+A$ la décomposition canonique d'une semi-martingale très spéciale[1]. On suppose que $1-\Delta X$ ne s'annule jamais[2], et que le processus croissant $\left(\Sigma_{s\leq t}\left(\frac{1}{1-\Delta M_s}\right)^2 I_{\{|1-\Delta M_s|<1/2\}}\right)^{1/2}$ est localement intégrable. Alors il existe une et une seule semimartingale Z telle que (les i.s. ci-dessous aient un sens et que) l'on ait

$$(\overset{+}{e}_X) \qquad Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_s dX_s \quad \left(= 1 + \int_{]0,t]} Z_s dM_s + \int_{]0,t]} Z_s dA_s \right) .$$

Cette solution est $\overset{+}{E}(X)=E(\overset{+}{X})$, où $\overset{+}{X}_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{1-\Delta X_s} = \int_{]0,t]} \frac{dM_s}{1-\Delta M_s} + \int_{]0,t]} \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$. De plus, $\overset{+}{X}$ et Z sont très spéciales.[3]

<u>Démonstration</u> . Nous commençons par quelques remarques sur la condition d'intégrabilité imposée. D'abord, A n'a que des sauts prévisibles, M que des sauts totalement inaccessibles, donc la condition que $1-\Delta X$ ne s'annule pas signifie que $1-\Delta M$ et $1-\Delta A$ ne s'annulent pas. Ensuite,

---

1. En réalité, X_0 n'intervient pas. 2. Cela entraîne que $1-\Delta X_t(\omega)$ est borné inférieurement par un nombre >0 sur tout intervalle compact (ne pas confondre cela avec "localement borné inf^t" au sens des t.d'arrêt). 3. Ce théorème a été démontré indépendamment par Ch. Yoeurp (non publié)

il revient au même de dire que le processus croissant de l'énoncé est localement intégrable, ou que le processus croissant

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s|<1/2\}} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Mais d'autre part, nous savons que $(\Sigma_{s\leqq t} \Delta M_s^2)^{1/2}$ est localement intégrable, donc le processus croissant

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{| \ |\geqq 1/2\}} \right)^{1/2}$$

est toujours localement intégrable, et l'intégrabilité locale de l' énoncé équivaut à celle du processus croissant

$$\alpha_t = \left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

– d'où il résulte en particulier que $I_{\{| \ |<1/2\}}$ aurait pu être remplacé par $I_{\{| \ |<\varepsilon\}}$ pour n'importe quel $\varepsilon\in]0,1[$. Une autre remarque, qui interviendra par la suite : le processus croissant

$$\beta_t = \Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{|1-\Delta M_s|} \quad \text{(fini : note 2 page précédente)}$$

est localement intégrable, si la condition de l'énoncé est satisfaite . En effet, choisissons des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$, réduisant fortement la martingale locale M, et tels que $\beta_{T_n-} \leqq n$, $\alpha_{T_n} \in L^1$. Montrons que $\beta_{T_n} \in L^1$, ce qui revient à dire que $\Delta\beta_{T_n} = \Delta M_{T_n}^2 / |1-\Delta M_{T_n}|$ est intégrable. Comme T_n réduit fortement M, ΔM_{T_n} est intégrable, donc $\Delta\beta_{T_n} I_{\{|1-\Delta M_{T_n}|\geqq 1/2\}}$ est intégrable. D'autre part, on a

$$\frac{|\Delta M_{T_n}|}{|1-\Delta M_{T_n}|} \leqq \alpha_{T_n} \in L^1$$

et le côté gauche majore $\frac{2}{3} |\Delta\beta_{T_n}| I_{\{|1-\Delta M_{T_n}|\leqq 1/2\}}$ (car $|\Delta M_{T_n}|^2 I_{\{ \}} \leqq \frac{3}{2}|\Delta M_{T_n}|$). On pourra comparer ce raisonnement à celui de [5] , IV. n°32 .

Par un raisonnement tout à fait analogue, mais plus simple, on démontre que la condition de l'énoncé est équivalente à l'intégrabilité locale du processus croissant à valeurs finies

$$\delta_t = \Sigma_{s\leqq t} \frac{1}{|1-\Delta M_s|} I_{\{|1-\Delta M_s|< 1/2\}}$$

Enfin, une dernière remarque : dans ces conditions d'intégrabilité, on peut partout faire disparaître la décomposition[1], en remplaçant M par X . En effet, les processus croissants analogues relatifs aux sauts prévisibles de X, par exemple

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{1}{(1-\Delta A_t)^2} I_{\{|1-\Delta A_t|\leqq 1/2\}} \right)^{1/2}$$

sont prévisibles à valeurs finies, donc toujours localement intégrables.

Passons à la démonstration proprement dite. Vérifions d'abord que l'on peut définir $\overset{+}{X}$. L'intégrale de Stieltjes $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s}$ est bien définie, car la fonction $|1-\Delta X_s(\omega)|$ est bornée inférieurement sur tout intervalle compact. D'autre part, $1-\Delta M$ n'est $\neq 0$ qu'en des temps totalement inaccessibles, donc $1-\Delta M = 1$ p.p. pour la mesure dA, et $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s} = \int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$, ce qui montre que ce processus à variation finie est prévisible.

En ce qui concerne l'intégrale stochastique optionnelle $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta X_s}$, nous remarquons de même que $1-\Delta A$ n'est $\neq 1$ qu'en des temps d'arrêt prévisibles, donc que $1-\Delta A = 1$ p.p. pour la mesure $d[M,M]$. L'intégrale stochastique est donc égale à $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta M_s}$. Pour vérifier que celle-ci a un sens, il nous faut examiner si le processus croissant $\left(\int \frac{d[M,M]_s}{(1-\Delta M_s)^2}\right)^{1/2}$ est localement intégrable. Comme $1-\Delta M_s$ ne diffère de 1 que pour des s en infinité dénombrable , il n'y a aucune difficulté quant à l'intégrale relative à $<M^c,M^c>$, et il suffit de voir si

$$\left(\Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Nous avons vu plus haut que c'est bien le cas. Ainsi $\overset{+}{X}$ est bien définie, et il apparaît sur sa décomposition que c'est une semi-martingale très spéciale.

---

1. Désormais, nous supposons que $X_0=0$.

Pour prouver l'unicité, nous remarquons que $(\overset{+}{e}_X)$ entraîne, comme X est très spéciale ([5], II.35 et V.20) que $\Delta Z_t = Z_t \Delta X_t$, et donc que $Z_t = Z_{t-}/(1-\Delta X_t)$. D'autre part, si H est prévisible localement borné, K optionnel tel que l'intégrale $K \bullet X$ ($= K \bullet M + K \bullet A$) ait un sens, l'intégrale optionnelle $(HK) \bullet X$ a un sens et l'on a $(HK) \bullet X = H \bullet (K \bullet X)$. Ici, prenant $H = Z_-$, $K = 1/1-\Delta X$,$(\overset{+}{e}_X)$ devient

$$(*) \qquad Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-} \frac{dX_s}{1-\Delta X_s} = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-} d\overset{+}{X}_s$$

dont nous savons que la seule solution est $\mathcal{E}(\overset{+}{X})$. Inversement, soit $Z = \mathcal{E}(\overset{+}{X})$, montrons qu'elle satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$. Nous avons $\Delta Z_t = Z_{t-} \Delta \overset{+}{X}_t$, donc - à nouveau grâce au caractère très spécial de X - $\Delta Z_t = Z_{t-} \Delta X_t / 1-\Delta X_t$, et enfin $Z_{t-} = Z_t(1-\Delta X_t)$. Ainsi

$$Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_{s-}\left(\frac{1}{1-\Delta X_s} dX_s\right) = 1 + \int_{]0,t]} \frac{Z_{s-}}{1-\Delta X_s} dX_s$$
$$= 1 + \int_{]0,t]} Z_s dX_s$$

de sorte que Z satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$.

Donnons maintenant une forme plus explicite de $\overset{+}{\mathcal{E}}(X)$.

<u>Proposition 8</u> . Sous les hypothèses de la proposition 7, on a

$$\overset{+}{\mathcal{E}}(X) = \frac{\exp(-\gamma - \langle X^c, X^c \rangle)}{\mathcal{E}(-X)}$$

où γ est la projection prévisible duale de $\Sigma_{s \leqq t} \frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s}$.

<u>Démonstration</u> . Nous savons que γ existe (étude du processus croissant β dans la démonstration précédente). Comme M est quasi-continue à gauche, γ est continu, et la formule s'écrit

$$\overset{+}{\mathcal{E}}(X)\mathcal{E}(-X) = \mathcal{E}(-\gamma - \langle X^c, X^c \rangle)$$

Comme $\overset{+}{\mathcal{E}}(X) = \mathcal{E}(\overset{+}{X})$, cette formule s'écrit, d'après la prop.4

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = -\gamma - \langle X^c, X^c \rangle$$

Nous remplaçons X par M+A , $\overset{+}{X}$ par $\frac{1}{1-\Delta M} \bullet M + \frac{1}{1-\Delta A} \bullet A$, de sorte que $\overset{+}{X} - X = \frac{\Delta M}{1-\Delta M} \bullet M + \frac{\Delta A}{1-\Delta A} \bullet A$. Quant à $[X, \overset{+}{X}]$, nous avons vu que $\overset{+}{X}{}^c = X^c$, et que $\Delta \overset{+}{X} = \frac{\Delta X}{1-\Delta X} = \frac{\Delta M}{1-\Delta M} + \frac{\Delta A}{1-\Delta A}$. Ainsi, comme $[M,A]=0$

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = \left(\frac{\Delta M}{1-\Delta M} \bullet M - \Sigma_{s \leqq \cdot} \frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s}\right) - \left(\frac{\Delta A}{1-\Delta A} \bullet A - \Sigma_{s \leqq \cdot} \frac{\Delta A_s^2}{1-\Delta A_s}\right) - \langle X^c, X^c \rangle$$

La seconde parenthèse est nulle, car c'est un processus à variation finie/ purement discontinu dont les sauts sont nuls. Il reste seulement à vérifier que

$$\frac{\Delta M}{1-\Delta M}\cdot M = \Sigma_{s\leq\cdot}\frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s} - Y$$

Or les deux membres sont des martingales locales sans partie continue, qui ont les mêmes sauts.

3. MESURE DE LEVY ET FORMULE D'ITO POUR UNE MARTINGALE LOCALE QUASI--CONTINUE A GAUCHE.

3.1. Contrairement à ce qui se passe pour les processus de Markov, la notion de "mesure de Lévy" d'une martingale locale n'a été utilisée que très rarement (voir cependant [2] et [3]).

Nous avons tout d'abord besoin de quelques généralités sur les mesures aléatoires.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable lusinien. On note $\tilde{\Omega} = \Omega\times[0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$ ($\mathcal{P}$ est la tribu prévisible sur $\Omega\times[0,\infty[$), ainsi que $\tilde{E} =]0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{E}} = B(]0,\infty[)\otimes\mathcal{E}$.

On appelle <u>mesure aléatoire</u> tout noyau positif $\eta(\omega ; dt\times dx)$ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(\tilde{E},\tilde{\mathcal{E}})$. Une mesure aléatoire η est dite <u>prévisible</u> si, pour tout $Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+$ le processus ηY suivant est prévisible

$$(\eta Y)_t(\omega) = \int_{]0,t]}\int_E Y(\omega,s,x)\eta(\omega ; ds,dx)$$

D'après [1] (lemme 2.2) on a la

<u>Proposition 9</u> . Soit η mesure aléatoire telle que la mesure M_η définie sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{P}})$ par

$$\forall\, Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+ \quad M_\eta(Y) = E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.;dt,dx)]$$

soit σ-finie. Il existe alors une unique mesure prévisible, notée η^3, telle que

$$\forall\, Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+,\ E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.;dt,dx)] = E[\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta^3(.;dt,dx)]$$

Nous appliquons ce résultat dans la situation suivante : $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$, X est une martingale locale réelle, et

$$\eta(\omega ; dt\times dx) = \Sigma_{s>0}\ I_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}}\ \varepsilon_s(dt)\varepsilon_{\Delta X_s(\omega)}(dx)$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 9, on établit le

<u>Lemme 2</u> . La mesure M_η est σ-finie.

Démonstration . Le processus croissant $\Sigma_{s\leqq t}(\Delta X_s^2\wedge 1) \leqq [X,X]_t$ est à valeurs finies et à sauts bornés par 1. Il est donc localement intégrable. Cela signifie qu'il existe des temps d'arrêt $T_n\uparrow+\infty$, des constantes $a_n>0$, tels que la fonction

$$H(\omega,s,x) = \Sigma_n\ a_n 1_{]0,T_n]}(s,\omega)\ x^2\wedge 1$$

soit M_η-intégrable. Comme H est strictement positive sur $\tilde{\Omega}$, M_η est σ-finie. □

On appelle mesure de Lévy de X, et on note $\nu(\omega,\ ds\times dx)$, la mesure prévisible η^3. Elle interviendra pour nous de la manière suivante : si $f(s,x)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*$, la projection duale prévisible du processus croissant $\Sigma_{s\leqq t}\ f(s,\Delta X_s)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$ est le processus croissant $\int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*}\nu(ds\times dx)f(s,x)$. On passe de là au cas des fonctions f, non nécessairement positives, telles que le processus $\Sigma_{s\leqq t}|f(s,\Delta X_s)|I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$ soit localement intégrable. On note pour $f\in \underline{\underline{B}}_+(\mathbb{R})$ $\nu_t(.,f) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*}\nu(.,ds\times dx)I_{]0,t]}(s)f(x)$.

3.2. Voici, à l'aide de la mesure ν - sous des hypothèses convenables - une nouvelle écriture de la formule d'Ito.

Théorème 2 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, et f fonction de classe C^2 telle que le processus $\Sigma_{s\leqq t}|f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s|$ soit localement intégrable. Alors,

$$(6)\ f(X_t) = f(X_0) + \int_{]0,t]}\delta f(X_{s-},X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s$$

$$+ \int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*}\nu(ds\times dx)[f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})x\ ]$$

où ν est la mesure de Lévy de X, et $\delta f(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $y\neq x$, et $f'(x)$ si $y=x$.

Démonstration . On écrit la formule d'Ito usuelle, dans laquelle le dernier terme est

$$S(f)_t = \Sigma_{s\leqq t}\ \{\ f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s\ \}\ .$$

D'après l'hypothèse d'intégrabilité que l'on vient de faire, S(f) admet pour projection duale prévisible le processus suivant, continu du fait que X est quasi-continue à gauche

$$S(f)_t^s = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} \nu(ds\times dx)[f(X_{s-}+x)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})x] \quad .$$

Le processus $\overset{c}{S}(f) = S(f)-S(f)^s$ est donc une martingale locale, somme compensée de sauts. De plus

$$\Delta\overset{c}{S}(f)_s = (f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$$
$$= \left(\frac{f(X_s)\ f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\Delta X_s$$

D'autre part, on a

$$\left(\int_{]0,t]} \left[\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right]^2 I_{\{\Delta X_s\neq 0\}} d[X,X]_s\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\Sigma_{s\leqq t} \left[\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right]^2 I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\ \Delta X_s^2\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \quad \Sigma_{s\leqq t} |f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s|$$

qui est un processus localement intégrable par hypothèse. L'intégrale stochastique

$$M_t^f = \int_{]0,t]} \left(\frac{f(X_s)-f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-})\right)I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}dX_s$$

est donc bien définie. De plus, l'intégrale relative à X^c est nulle, donc M^f est une somme compensée de sauts. Comme M^f et $\overset{c}{S}(f)$ ont les mêmes sauts, elles sont égales. Ajoutant alors M^f à l'intégrale stochastique qui figure dans la formule d'Ito usuelle, on obtient

$$M_t^f + \int_{]0,t]} f'(X_{s-})dX_s = \int_{]0,t]} \delta f(X_{s-},X_s)dX_s$$

et le théorème est établi.

Remarquons que, dans le cadre des martingales quasi-continues à gauche, la formule d'Ito que l'on vient d'obtenir étend la formule de Pratelli et Yoeurp rappelée dans la proposition 2. En effet, X appartient à $\underline{\underline{M}}_{loc}$ si et seulement si $f(x)=x^2$ vérifie la condition du théorème 1, et on peut écrire la proposition 2

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_{]0,t]} (X_{s-}+X_s)dX_s + \langle X,X \rangle_t$$

Or $\langle X,X\rangle_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \langle X^d,X^d\rangle_t$, et $\langle X^d,X^d\rangle_t = \int \nu_t(dx)x^2$.

4. UNE SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

4.1. Rappelons tout d'abord l'extension du théorème de Girsanov obtenue par J. Van Schuppen et E. Wong en [7] :

Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U,X]$ soit localement intégrable, ce qui est équivalent , d'après [8], à supposer l'existence de $\langle U,X\rangle$. Supposons de plus $1+\Delta U \geqq 0$, de sorte que la martingale locale $\mathcal{E}(U)$ est positive, et soit T un temps d'arrêt tel que $\mathcal{E}(U)^T$ soit uniformément intégrable. On définit la probabilité P_U^T sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_T)$ par $dP_U^T = \mathcal{E}(U)_T dP|_{\underline{\underline{F}}_T}$. Alors, d'après [7], ${}^U X = X-\langle X,U\rangle$ arrêtée à T est une P_U^T-martingale locale. Ou encore (sans arrêt à T), $\mathcal{E}(X)^U X$ est une P-martingale locale ([8]), variante pour laquelle la condition $1+\Delta U \geqq 0$ n'est plus nécessaire. Le point clé de la démonstration est encore le lemme fondamental.

Il en est de même pour la variante que nous proposons maintenant[1]

<u>Proposition 10</u> . Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U,X]$ soit localement intégrables. Alors $\mathcal{E}({}^U X)\mathcal{E}(U)$ est une martingale locale.

<u>Démonstration</u> . $\mathcal{E}({}^U X)\mathcal{E}(U) = \mathcal{E}({}^U X+U+[{}^U X,U])$. Il suffit donc de démontrer que

$${}^U X+U+[{}^U X,U] = X-\langle X,U\rangle + U + [X,U] - [\langle X,U\rangle,U]$$

est une martingale locale. Or X,U, $[X,U]-\langle X,U\rangle$ sont des martingales locales, et $[\langle X,U\rangle,U]$ est une martingale locale d'après le lemme fondamental.

4.2. Soit X martingale locale nulle en 0 et <u>quasi-continue à gauche</u>.

La proposition précédente va permettre d'obtenir de façon naturelle une suite de formules exponentielles associées à X.

Supposons tout d'abord que X soit localement de carré intégrable. En remplaçant dans la proposition précédente X et U par $\frac{1}{2}X$, on obtient

---

1. Elle contient, au moins formellement, les autres résultats. En effet, remplaçant X par tX on a que $\mathcal{E}(t\,{}^U X)\mathcal{E}(U)$ est une martingale locale, et tous les coefficients du développement de Taylor en t sont des martingales locales ; ${}^U X\mathcal{E}(U)$ est le premier.

$$E_2(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{4}<X,X>)\mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X) \in \underline{\underline{L}}$$

Comme X est quasi-continue à gauche, $<X;X>$ est continu, $[<X,X>,X] = 0$, et la proposition 4 nous donne

$$E_2(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X)\mathcal{E}(-\tfrac{1}{4}<X,X>)\mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}X)^2\exp(-\tfrac{1}{4}<X,X>)$$

Plus généralement, nous allons calculer un processus prévisible $A^{(n)}$ (continu) tel que

$$E_n(X) = \mathcal{E}(\tfrac{1}{n}X)^n \exp(-A^{(n)}) \in \underline{\underline{L}}$$

Le calcul est fait dans l'énoncé suivant, avec des notations un peu différentes.

Théorème 3 . Soit X martingale locale nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $\lambda \geqq 2$. On suppose que $1+\Delta X$ est un processus $\geqq 0$ (restriction inutile si λ est entier) et que X est localement bornée dans L^λ. Alors si l'on pose

$$(7) \quad A_t = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}<X^c,X^c>_t + \int_{\mathbb{R}} \nu_t(dx)\{(1+x)^\lambda-1-\lambda x\}$$

le processus

$$\Lambda_t = \mathcal{E}(X)^\lambda \exp(-A)$$

est une martingale locale.

Démonstration . Nous vérifions d'abord que A_t est fini, et continu. Nous traiterons le cas où $\lambda=n$ est entier, sans l'hypothèse de positivité de $1+\Delta X$, ce qui est un peu plus délicat. Il s'agit de vérifier que le processus croissant quasi-continu à gauche

$$\Sigma_{s\leqq t} \,|(1+\Delta X_s)^n - 1 - n\Delta X_s|$$

est localement intégrable . Nous le coupons en deux morceaux, l'un relatif aux s tels que $|\Delta X_s|<1$, pour lequel on a une majoration de la forme $c\Sigma_{s\leqq t} \Delta X_s^2 I_{\{|\Delta X_s|<1\}}$, processus localement intégrable , et l'autre, relatif aux s tels que $|\Delta X_s|>1$. Pour ce second processus, nous utilisons une majoration de la forme

$$c\Sigma_{s\leqq t} |\Delta X_s|^n \leqq c\Sigma_{s<t} |\Delta X_s|^n + c2^n \sup_{s\leqq t} |X_s|^n$$

le premier terme au second membre est un processus croissant localement borné, car fini et continu à gauche, et le second terme un processus croissant localement intégrable, d'après l'inégalité de Doob.

Revenant à λ quelconque, nous écrivons la formule d'Ito pour $F(\mathcal{E}(X),A)$ où $F(u,v)= u^{\lambda}e^{-v}$. Il vient après quelques calculs

$$\Lambda_t = 1 + \lambda\int_{]0,t]} \Lambda_{s-}dX_s - \int_{]0,t]}\Lambda_{s-}dA_s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\int_0^t \Lambda_s d\langle X^c,X^c\rangle_s$$

$$+ \Sigma_{s\leqq t} \{\Lambda_s-\Lambda_{s-}-\lambda\Lambda_{s-}\Delta X_s\} ,$$

(on a tenu compte ici de la continuité de A, mais non de son expression explicite (7)). On a $\Lambda_s=\Lambda_{s-}(1+\Delta X_s)^{\lambda}$, donc la dernière somme s'écrit $\Sigma_{s\leqq t} \Lambda_{s-}((1+\Delta X_s)^{\lambda}-1-\lambda\Delta X_s)$, qui est une intégrale stochastique par rapport au processus $C_t= \Sigma_{s\leqq t}((1+\Delta X_s)^{\lambda}-1-\lambda\Delta X_s)$, localement intégrable par hypothèse. Il reste donc

$$\Lambda_t \underset{(\underline{\underline{L}})}{\equiv} \int_{]0,t]} \Lambda_{s-}\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} d\langle X^c,X^c\rangle_s + dC_s - dA_s \right)$$

et si l'on remplace maintenant A par sa valeur (7), la parenthèse est une martingale locale , car $\int\nu_t(dx)\{(1+x)^{\lambda}-1-\lambda x\}$ est la projection duale prévisible de C.

Remarques . a) Si $1+\Delta X \geqq 0$ (i.e. si $\mathcal{E}(X)$ est positive), on peut étendre ce résultat à toutes les valeurs de $\lambda > 1$. Cela exige un passage à la limite pour vérifier la validité de la formule d'Ito utilisée ci-dessus, car $u^{\lambda}e^{-v}$ n'est plus de classe C^2, et il faut considérer $(u+\varepsilon)^{\lambda}e^{-v}$, et faire tendre ε vers 0.

Si $\lambda>1$, et $1+\Delta X$ ne s'annule pas, un calcul analogue donne la compensation multiplicative de $|\mathcal{E}(X)|^{\lambda}$.

b) Le processus A est unique si $1+\Delta X$ ne s'annule pas. En effet, soit $Y=\mathcal{E}(X)^{\lambda}$, et soit $B=\exp(-A)$. Notons les propriétés : Y est une semimartingale, et Y et Y_- ne s'annulent jamais (le produit infini de $\mathcal{E}(X)$ est absolument convergent et sans facteur nul) ; B est un processus à variation finie prévisible, $B_0=1$, B et B_- ne s'annulent jamais ; YB est une martingale locale. Y étant donnée, cela caractérise uniquement B. En effet, d'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp ([5], V.38 : c'est une autre forme du lemme fondamental) $d(YB)=BdY+Y_-dB$, donc $\frac{dY}{Y_-} + \frac{dB}{B}$ est la différentielle d'une martingale locale. Cela caractérise uniquement le processus à variation finie prévisible $C_t= \int_{]0,t]} \frac{dB_s}{B_s}$, puis on a $B=1/\mathcal{E}(-C)$. Voir le chapitre de [8] sur les décompositions multiplicatives.

c) Considérons la martingale locale

$$\hat{X}_t^{(\lambda)} = \lambda X_t + \Sigma_{s\leqq t} \{(1+\Delta X_s)^\lambda - 1 - \lambda\Delta X_s\} - \int \nu_t(dx)\{(1+x)^\lambda - 1 - \lambda x\}$$

Nous avons vu au cours de la démonstration que $\Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_{s-} d\hat{X}_s^\lambda$, donc $\Lambda = \mathcal{E}(\hat{X}^{(\lambda)})$.

Revenons alors aux notations précédant l'énoncé du théorème 3. Le processus

$$A_t^{(n)} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})<X^c,X^c>_t + \int \nu_t(dx)\{(1+\frac{x}{n})^n - 1 - x\}$$

est l'unique processus prévisible à variation finie tel que

$$\begin{aligned} E_n(X) &= \mathcal{E}(\frac{1}{n}X)^n \exp(-A^{(n)}) \\ &= \exp\{X_t - \frac{1}{2}<X^c,X^c> - \int \nu_.(dx)[(1+\frac{x}{n})^n - 1 - x]\} \prod_{s\leqq .}(1+\frac{\Delta X_s}{n})^n e^{-\Delta X_s} \end{aligned}$$

soit une martingale locale. De plus, nous avons vu que $E_n(X) = \mathcal{E}(\hat{X}^n)$, avec

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^n &= X_t + \Sigma_{s\leqq t} Q_n(\Delta X_s) - \int \nu_t(dx) Q_n(x) \quad \text{où } Q_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n - 1 - x \\ &= X_t + \int_0^t U_n(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } U_n(x) = \frac{Q_n(x)}{x} \text{ si } x\neq 0 \text{ , } 0 \text{ si } x=0 \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, $Q_n(x)$ tend vers $e^x - 1 - x$, et on a de même le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u> . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, telle que le processus $\Sigma_{s\leqq t} |e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s|$ soit localement intégrable (condition qui est en particulier réalisée si les sauts de X sont uniformément bornés). Le processus $A_t^{(\infty)} = \int \nu_t(dx)(e^x - 1 - x)$ est l'unique processus prévisible, à variation finie tel que

$$E_\infty(X) = \exp\{ X_. - \frac{1}{2}<X^c,X^c> - A^{(\infty)}\}$$

soit une martingale locale.

La démonstration est identique à celle du théorème 3. On a $E_\infty(X) = \mathcal{E}(\hat{X}^\infty)$, avec

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^\infty &= X_t + \Sigma_{s\leqq t} (e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s) - \int \nu_t(dx)(e^x - 1 - x) \\ &= X_t + \int_{]0,t]} f(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x} \text{ , } f(0) = 0 \text{ .} \end{aligned}$$

L'application E_∞ a été utilisée en [4] et [6] pour la résolution du problème des martingales lié aux opérateurs intégro-différentiels qui sont générateurs infinitésimaux de processus de Markov sur $\mathbb{R}^n$. Toutes les applications E_i ($i=n$ ou ∞) sont des "exponentielles", en ce sens que si X et Y sont quasi-continues à gauche et $[X,Y]=0$ on a $E_i(X+Y)=E_i(X)E_i(Y)$.

4.3. On peut maintenant caractériser de plusieurs manières le processus croissant $<X^c,X^c>$ et la mesure aléatoire $\nu(ds{\times}dx)$ d'une martingale locale quasi-continue à gauche, dont on supposera en général les sauts uniformément bornés.

Caractérisons tout d'abord le processus $<X^c,X^c>$.

Théorème 5 . Soit X martingale locale telle que $1+\Delta X$ ne s'annule jamais. $A = <X^c,X^c>$ est l'unique processus croissant prévisible tel que

$$\Lambda^1(X,A) = \exp\{X_t - \tfrac{1}{2}A_t\}\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \quad \in \underline{\underline{L}}$$

Démonstration . Si Y est la semimartingale $\exp(X_t)\prod(\quad)$, le produit infini est absolument convergent et aucun de ses facteurs n'est nul, donc Y_- ne s'annule jamais. On applique alors le principe général d'unicité des décompositions multiplicatives , remarque b) suivant le théorème 3.

On caractérise maintenant la mesure de Lévy ν .

Théorème 6 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche telle que $|\Delta X|\leq 1$. La mesure de Lévy $\nu(ds{\times}dx)$ est caractérisée par les propriétés suivantes

- elle est prévisible , portée par $]0,\infty[\times([-1,+1]\setminus\{0\})$,
- le processus $\int\nu_t(dx)x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout entier n, $2\leq n<\infty$

$$\Lambda^n(X,\nu)=\exp\{X_t - \tfrac{1}{2}<X^c,X^c>_t - \int\nu_t(dx)Q_n(x)\}\prod_{s\leq t}(1+\tfrac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$$

est une martingale locale, où $Q_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n-1-x$.

Démonstration . Soit $\bar{\nu}(\omega\, ;\, ds{\times}dx)$ une seconde mesure aléatoire prévisible possédant les mêmes propriétés. Nous définissons de manière évidente $\bar{\nu}_t(\omega,dx)$ et $\Lambda^n(X,\bar{\nu})$. Nous introduisons la semimartingale $Y^n= \exp\{X_t - \frac{1}{2}<X^c,X^c>_t\}\prod_{s\leq t}(1+\frac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$, et les processus à variation finie prévisibles $B^n_t=\exp(-\int\nu_t(dx)Q_n(x))$, et $\bar{B}^n_t$ de même. Comme Y^nB^n et $Y^n\bar{B}^n$ sont des martingales locales, le principe général d'unicité (remarque b) suivant le th.3) entraîne que $B^n=\bar{B}^n$, ou encore $\int\nu_t(dx)Q_n(x)=\int\bar{\nu}_t(dx)Q_n(x)$ pour tout n, donc par combinaison linéaire $\int\nu_t(dx)x^n = \int\bar{\nu}_t(dx)x^n$ pour tout $n\geq 2$, puis par le théorème de Weierstrass $\int\nu_t(dx)x^2f(x) = \int\bar{\nu}_t(dx)x^2f(x)$ pour toute f continue sur $[-1,1]$.

Donc les mesures $\nu_t(dx)x^2$ et $\overline{\nu}_t(dx)x^2$ sont égales, et comme $\nu_t(dx)$ $\overline{\nu}_t(dx)$ ne chargent pas 0, elles sont aussi égales. On en déduit aisément l'égalité de ν et de $\overline{\nu}$ elles mêmes.

On a de même, avec l'application E_∞ , des théorèmes analogues aux précédents, permettant de caractériser $<X^c,X^c>$ et ν .

Théorème 7 . Soit X processus càdlàg., à valeurs dans $\mathbb{R}$, adapté, quasi-continu à gauche, et tel que $|\Delta X|\leq 1$.

1) Si X est une martingale locale, la mesure de Lévy ν de X est uniquement caractérisée par les propriétés suivantes :

- elle est prévisible, portée par $]0,\infty[\times([-1,1]\setminus\{0\})$,
- le processus $\int\nu_t(dx)x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, le processus

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,\nu) = \exp\{\alpha X_t - \tfrac{1}{2}\alpha^2<X^c,X^c>_t - \int\nu_t(dx)(e^{\alpha x}-1-\alpha x)\}$$

est une martingale locale.

2) Supposons seulement que le processus croissant $\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X_s^2$ soit localement intégrable, et soit ν la projection duale prévisible[1] de la mesure aléatoire $\Sigma_u\ I_{\{\Delta X_u\neq 0\}}\varepsilon_u(ds)\varepsilon_{\Delta X_u}(dx)$. Soit A un processus croissant nul en 0, adapté et continu. Pour que X soit une martingale locale et que l'on ait $<X^c,X^c>=A$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,A) = \exp\{\ \alpha X_t - \tfrac{1}{2}\alpha^2 A_t - \int\nu_t(dx)(e^{\alpha x}-1-\alpha x)\ \}$$

soit une martingale locale.

Démonstration . 1) La démonstration est identique à celle du théorème 6, si l'on développe $e^{\alpha x}-1-\alpha x$ en série entière.

2) Avec les hypothèses faites, $\frac{d}{d\alpha}\Lambda^{(\infty)}(\alpha,X,A)|_{\alpha=0}=X$ est une martingale locale. On montre ensuite que $A=<X^c,X^c>$ de même qu'au théorème 5.

1. Elle existe d'après la prop.9.

REFERENCES

[1]. J. Jacod. Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z.f.W. 31, 1975, 235-246.

[2]. J. Jacod et J. Mémin. Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales. A paraître.

[3]. N. El Karoui et J.P. Lepeltier. Processus de Poisson ponctuel associé à un processus ponctuel, représentation des martingales de carré intégrable quasi-continues à gauche (à paraître).

[4]. J.P. Lepeltier . Thèse de 3e Cycle, Université de Paris VI.

[5]. P.A.Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. Dans ce vol.

[6]. D.W. Stroock. Diffusion processes associated with Lévy generators. Z.f.W. 32, 1975, 209-244.

[7]. J.H. Van Schuppen et E. Wong. Transformations of local martingales under a change of law. Annals of Prob. 2, 1974, p. 879-888.

[8]. Ch. Yoeurp . Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Dans ce volume.