Représentation intégrale des martingales de carré intégrable.

Etude des distributions extrémales.

Marc YOR

Introduction :

Le problème de caractériser les martingales continues $(M_t, t \geq 0)$ qui vérifient la propriété

$(\mathcal{R}_p)$ Toute martingale locale N , nulle en 0 , relative à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t(M)$ associée à M est donnée par $N_t = \int_0^t H_s \, dM_s$; où H est un processus $\mathcal{F}_t(M)$ prévisible,

est posé depuis plusieurs années. K.A. Yen et Ch. Yoeurp ont montré en particulier en (9) que M vérifie $(\mathcal{R}_p)$ si, et seulement si, M est une martingale standard, notion introduite en (9) , et rappelée ci-dessous.

De même, le problème de caractériser les points extrêmaux de l'ensemble convexe formé par les distributions des martingales locales continues considérées comme probabilités sur $\Omega_c = C(\mathbb{R}_+ , \mathbb{R})$ (et faisant du processus des coordonnées $X_t(\omega) \equiv \omega(t)$ une martingale locale) n'a toujours pas reçu de solution complète (ce problème est l'une des questions posées par L. Dubins et G. Schwarz en (3)) .

On montre ci-dessous que ces deux problèmes n'en font qu'un seul. On aborde en fait plus généralement ces problèmes - convenablement formulés - pour les martingales locales continues à droite et limitées à gauche. On obtient alors des implications entre diverses propriétés ; cependant, on ne parvient pas à une caractérisation complète des distributions extrémales.

Ensuite, le théorème de Choquet permet d'obtenir pour tout p tel que $1<p<\infty$ la représentation de toute distribution de martingale de puissance pième intégrable pour tout $t \geq 0$ comme barycentre de distributions extrémales.

Je remercie vivement E. Lenglart dont les questions ont été à l'origine de ce travail.

1. Quelques propriétés de martingales remarquables.

1.1. - Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ espace de probabilité complet, muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ vérifiant les conditions habituelles. On note $\underline{\underline{L}}$ l'espace des $(\mathcal{F}_t,P)$ martingales locales, toujours supposées continues à droite et limitées à gauche, $\underline{\underline{M}}_{(loc)}$ l'espace des martingales (localement) de carré intégrable, et enfin $(\underline{\underline{H}}^1, \|\cdot\|_{H^1})$ l'espace de Banach des martingales locales telles que $\|M\|_{H^1} = E\left([M,M]_\infty^{1/2}\right) < \infty$.

Soit X une martingale locale. On étudie dans ce paragraphe la propriété de "représentation prévisible par rapport à X" .

<u>Proposition 1</u> : Soit X une martingale locale. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute martingale bornée, nulle en 0 , admet une représentation comme intégrale stochastique par rapport à X d'un processus prévisible (on dira simplement : admet une représentation prévisible par rapport à X).

(ii) Toute martingale locale, nulle en 0 , admet une représentation prévisible par rapport à X .

<u>Démonstration</u> : Supposons donc (i) réalisée. Par localisation, il suffit de démontrer que toute martingale locale de $\underline{\underline{H}}^1_0$ (c'est à dire, appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$, et nulle en 0) admet une représentation prévisible par rapport à X . Remarquons tout d'abord que l'espace

$$\mathcal{H} = \{f \text{ prévisible} \mid \|f\|_{\mathcal{H}} = E\sqrt{\int_0^\infty f_s^2 \, d[X,X]_s} < \infty \}$$

est complet pour la convergence selon la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$: d'une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, on extrait une sous-suite (f_{n_j}) telle que $\sum_j \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_{\mathcal{H}} < \infty$. Soit A l'ensemble (prévisible) de convergence de la série $\sum_j |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|(s,\omega)$. Posons $g = \sum_j |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| 1_A$ et

$f = (\sum_j (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}))\, 1_A$. Alors, $\|1_{A^c}\|_{\mathcal{H}} = 0$ et :

$\|f\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|g\| \leq \sum_j \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_{\mathcal{H}} < \infty$, enfin $\|f-f_{n_j}\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[(j\to\infty)]{} 0$

La suite de Cauchy (f_n) converge donc vers f pour $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

L'espace $\Lambda = \{f.X \; ; \; f \in \mathcal{H}\}$ est donc fermé dans $\underline{\underline{H}}^1_o$, et contient les martingales bornées, nulles en 0 , qui sont denses dans $\underline{\underline{H}}^1_o$. D'où $\Lambda = \underline{\underline{H}}^1_o$.

On notera la propriété de représentation prévisible par rapport à X $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$ ou simplement $\mathcal{R}_p(X)$ si elle est vérifiée pour $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t(X)$, $(\mathcal{F}_t(X), t \geq 0)$ désignant la filtration naturelle associée à X , rendue P-complète, et continue à droite[1].

Enonçons une seconde propriété, très voisine de $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$, que l'on notera $\mathcal{Q}(\mathcal{F},X)$: la seule martingale <u>locale</u> L , nulle en 0 , telle que XL soit aussi une martingale locale est la martingale nulle.

On notera $\mathcal{Q}_2(\mathcal{F},X)$ (resp. $\mathcal{Q}_b(\mathcal{F},X)$) la propriété précédente, où l'on a remplacé "<u>locale</u>" par "de carré intégrable" (resp. : "bornée") . On a évidemment : $\mathcal{Q}(\mathcal{F},X) \Rightarrow \mathcal{Q}_2(\mathcal{F},X) \Rightarrow \mathcal{Q}_b(\mathcal{F},X)$, et de plus :

<u>Proposition 2</u> : Soit $X \in \underline{\underline{L}}$. Alors, $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X) \Rightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{F},X)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $L \in \underline{\underline{L}}$, nulle en 0 , telle que XL soit aussi une martingale locale. Par hypothèse, on a : $L = f.X$, où f est prévisible. $[L,X] = f.[X,X]$ est une martingale locale. f étant prévisible,

$$(f\, 1_{|f|\leq n} \cdot (f.X))_t = \int_0^t f_s^2\, 1_{|f_s|\leq n}\, d[X,X]_s \in \underline{\underline{L}} .$$

---

(1) On adopte la même convention pour les propriétés énoncées par la suite.

De plus, elle est positive, c'est donc une surmartingale (positive) nulle en 0 , et donc identiquement nulle. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\int_0^t f_s^2\, d[X,X]_s = 0$, d'où $L = 0$.

Un cas particulièrement intéressant est celui où X est localement de carré intégrable. On rappelle auparavant le lemme classique de projection (prévisible) dans $\underline{\underline{M}}$, dû à Kunita-Watanabé :

<u>Lemme 1</u> : Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$. Pour toute martingale N de $\underline{\underline{M}}_{loc}$, il existe f processus prévisible tel que $\int_0^{\cdot} f_s^2\, d\langle M,M\rangle_s$ soit localement intégrable, et $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ vérifiant :

$$N = f.M + L \quad \text{et} \quad \langle L,M \rangle = 0 \; .$$

Cette décomposition en f.M et L est unique.

De plus, si N est de carré intégrable, L l'est aussi.
On en déduit la :

<u>Proposition 3</u> : Soit $X \in \underline{\underline{M}}_{loc}$; alors $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X) \Longleftrightarrow \mathcal{Q}_2(\mathcal{F},X)$.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 2, il s'agit de démontrer que $\mathcal{Q}_2(\mathcal{F},X)$ entraîne $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$. D'après la proposition 1 , il suffit de montrer que toute martingale N de $\underline{\underline{M}}_{loc}$, nulle en 0 , admet une représentation prévisible par rapport à X . Soit $N = f.X+L$ la décomposition décrite dans le lemme 1. L est nulle en 0 , appartient à $\underline{\underline{M}}_{loc}$, et XL est une martingale locale. Par hypothèse, $L = 0$, et $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$ est donc vérifiée.

1.2. - En (9), est introduite la propriété de représentation optionnelle par rapport à $X \in \underline{\underline{L}}$, quasi-continue à gauche - notée $\mathcal{R}_o(\mathcal{F},X)$ - définie à l'aide de la proposition 1, dont la démonstration reste valable lorsque l'on remplace "prévisible" par "optionnel". Cette démonstration est d'ailleurs différente de celle qui lui correspond en (9) (théorème 3). D'autre part, une version optionnelle convenable du lemme 1 figure également en (9) (théorème 2).

1.3. - Dans toute la suite, Ω_d (resp. Ω_c) désigne l'espace des fonctions $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues à droite, limitées à gauche (resp. continues). On note $X_t(\omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F}^\circ_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, $\mathcal{F}^\circ = \sigma(X_s, s \in \mathbb{R}_+)$. $\mathcal{M}_{d/c}$ est l'ensemble des probabilités sur $(\Omega_{d/c}, \mathcal{F}^\circ)$ qui font de X une martingale locale. $\mathcal{M}_c$ est un ensemble convexe, ce qui découle de la remarque suivante : P appartient à $\mathcal{M}_c$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_{t \wedge T_n}, t \geq 0)$ est une martingale continue, où $T_n(\omega) = \mathrm{Inf}(t \geq 0, |X_t(\omega)| \geq n)$ est une suite de $\mathcal{F}^\circ_t$ temps d'arrêt croissant partout vers $+\infty$. Par contre on ne sait pas montrer (et c'est probablement faux) que $\mathcal{M}_d$ est un ensemble convexe : si $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_d$, il n'y a aucune raison pour que leurs ensembles négligeables soient comparables, et donc pour que, si $(T^i_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de temps d'arrêt croissant P_i p.s. vers $+\infty$ et réduisant X pour P_i $(i = 1,2)$, la suite $(T^1_n \wedge T^2_n, n \in \mathbb{N})$ croisse P_i p.s. vers $+\infty$.

Cependant, la notion de point extrémal de $\mathcal{M}_d$ a toujours un sens naturel : $P \in \mathcal{M}_{d/c}$ est extrémale dans $\mathcal{M}_{d/c}$ (on note : $P \in \mathrm{ext}\,(\mathcal{M}_{d/c})$) si elle vérifie la propriété : $\forall \alpha \in]0,1[$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{d/c}$,

$$P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2 \Rightarrow P = P_1 = P_2 .$$

Dans ce nouveau cadre, on notera naturellement $\mathcal{R}_p(P)$ si $P \in \mathcal{M}_{d/c}$ et que la propriété $\mathcal{R}_p(X)$ est vérifiée sous la probabilité P (et de même pour les autres notations : on notera par exemple $\mathcal{F}_t(P)$ la filtration $\mathcal{F}_t(X)$ sous P).

La proposition suivante sera utilisée plusieurs fois par la suite :

<u>Proposition 4</u> : Soient $P_1, P \in \mathcal{M}_{d/c}$ telles qu'il existe $\alpha \leq 1$, avec $P_1 \leq \frac{1}{\alpha} P$.

Il existe une suite de $\mathcal{F}_t(P)$ temps d'arrêt $(T_n, n \in \mathbb{N})$ tels que : $T_n \uparrow \infty$ P p.s. (et donc P_1 p.s.) et $E(\sup_s |X_{s \wedge T_n}|) < \infty$. Pour toute telle suite, et pour tout n, $(X_{t \wedge T_n}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t(P_1), P_1)$ et $(\mathcal{F}_t(P), P)$ martingale uniformément intégrable.

<u>Démonstration</u> : X étant une P-martingale locale, est localement dans $\underline{\underline{H}}^1(P)$: il existe donc une suite T_n de $\mathcal{F}_t(P)$ temps d'arrêt, telle que $T_n \uparrow \infty$ P p.s., et, d'après l'inégalité de Davis, $E(\sup_s |X_{s \wedge T_n}|) < \infty$. D'autre part, il existe une suite $(T_n^1, n \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{F}_t(P_1)$ temps d'arrêt, telle que : $T_n^1 \uparrow \infty$ P_1 p.s., et pour tout n, $(X_{t \wedge T_n^1}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t(P_1)$, martingale uniformément intégrable. D'après le théorème d'arrêt, on a, pour tout p et tout n :

$$E_1\left(X_{(t \wedge T_p) \wedge T_n^1} \,|\, \mathcal{F}_{s \wedge T_p \wedge T_n^1}\right) = X_{s \wedge T_p \wedge T_n^1} .$$

Le processus <u>arrêté</u> $(X_{t \wedge T_p \wedge T_n^1}, t \geq 0)$ est donc une $(\mathcal{F}_{s \wedge T_p \wedge T_n^1}(P_1), P_1)$ martingale, donc une $\mathcal{F}_s(P_1)$ martingale. D'autre part, pour tout $u \geq 0$, on a

$$E_1\left(\sup_n |X_{u \wedge T_p \wedge T_n^1}|\right) \leq \frac{1}{\alpha} E\left(\sup_v |X_{v \wedge T_p}|\right) < \infty .$$

Faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité suivante, où $A_s \in \mathcal{F}_s(P_1)$ et $s \leq t$:

$$E_1\left(A_s \,;\, X_{t \wedge T_p \wedge T_n^1}\right) = E_1\left(A_s \,;\, X_{s \wedge T_p \wedge T_n^1}\right)$$

on a donc : $(X_{t\wedge T_p}, t \geq 0)$ est une P_1-martingale uniformément intégrable. C'est aussi une P-martingale uniformément intégrable, car le raisonnement précédent s'applique en prenant $P_1 = P$ et $(T_n^1, n\in\mathbb{N})$ une suite de $\mathcal{F}_t(P)$ temps d'arrêt qui réduit $(X_t, t \geq 0)$ sous P .

<u>Corollaire 1</u> : Avec les mêmes notations que celles de la proposition 4, si $(L_t, t \geq 0)$ est une version continue à droite de $E\left(\frac{dP_1}{dP} / \mathcal{F}_t(P)\right)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{t\wedge T_n} L_{t\wedge T_n}$ est une $(\mathcal{F}_t(P), P)$ martingale uniformément intégrable (XL est donc une $(\mathcal{F}_t(P), P)$ martingale locale).

<u>Démonstration</u> : $(X_{t\wedge T_n} L_{t\wedge T_n}, t \geq 0)$ est une martingale, car $(X_{t\wedge T_n}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t(P_1), P_1)$ martingale. Elle est uniformément intégrable, car

$$E\left(\sup_s |X_{s\wedge T_n} L_{s\wedge T_n}|\right) \leq \frac{1}{\alpha} E\left(\sup_s |X_{s\wedge T_n}|\right) < \infty .$$

Voici également la définition - dans ce cadre - d'une martingale (ou plutôt d'une probabilité !) standard ([9]) :

<u>Définition 1</u> : La probabilité $P\in\mathcal{M}_{d/c}$ est dite standard s'il n'existe pas d'autre probabilité $Q\in\mathcal{M}_{d/c}$ qui lui soit équivalente.

Le théorème suivant permet de classer les différentes propriétés introduites jusqu'alors :

<u>Théorème 1</u> : Soit $P\in\mathcal{M}_{d/c}$ telle que $\mathcal{F}_o(P)$ soit triviale, et que X soit quasi-continue à gauche sous P . On a les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_p(P) \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{Q}_1(P) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{Q}_2(P) \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{Q}_b(P) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& (P \text{ standard}) \arrow[urr, Rightarrow] & & P\in \mathrm{ext}(\mathcal{M}_{d/c}) & \mathcal{R}_o(P)
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> : a) D'après la proposition 2, $\mathcal{R}_p(P) \Longrightarrow \mathcal{Q}(P)$

b) $\mathcal{Q}(P) \Rightarrow P$ standard : supposons par exemple $P \in \mathcal{M}_d$, vérifiant $\mathcal{Q}(P)$, et $Q \in \mathcal{M}_d$ équivalente à P.

Soit $(L_t, t \geq 0)$ une version continue à droite de $E_P\left(\frac{dQ}{dP} \,|\mathcal{F}_t(P)\right)$. $\mathcal{F}_o(P)$ étant triviale, on a : $L_o = 1$ P p.s. Posons $L_t = 1 + N_t$. Puisque Q appartient à $\mathcal{M}_d$, $X\,N$ est une P martingale locale telle que $N_o = 0$. D'après l'hypothèse, $N = 0$ et donc $Q = P$.

c) $\mathcal{Q}_b(P) \Rightarrow P \in \text{ext}(\mathcal{M}_{d/c})$: supposons par exemple $P \in \mathcal{M}_d$ vérifiant $\mathcal{Q}_b(P)$. Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_d$, $\alpha \in]0,1[$, tels que : $P = \alpha\, P_1 + (1-\alpha)\, P_2$. Soit $(L_t, t \geq 0)$ une version continue à droite de $E_P\left(\frac{dP_1}{dP}|\mathcal{F}_t(P)\right)$. Comme $P_1 \leq \frac{1}{\alpha} P$, L est bornée et on peut appliquer le corollaire 1. Posons $L_t = 1 + N_t$. L'hypothèse $\mathcal{Q}_b(P)$ entraîne $N = 0$, et donc $P = P_1 = P_2$.

d) $P \in \text{ext}(\mathcal{M}_{d/c}) \Rightarrow \mathcal{Q}_b(P)$: soit L martingale bornée par k, nulle en 0, telle que $X\,L$ soit encore une P-martingale locale. Alors, $P_1 = (1 + \frac{L_\infty}{2k})P$ et $P_2 = (1 - \frac{L_\infty}{2k})P$ appartiennent à $\mathcal{M}_{d/c}$. De plus, $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$. P étant extrémale, on a $P = P_1 = P_2$, et donc $L = 0$.

e) P standard $\Rightarrow \mathcal{Q}_b(P)$: avec les mêmes notations qu'en d), on pose $Q = (1 + \frac{L_\infty}{2k})$. P qui appartient à $\mathcal{M}_{d/c}$, donc $Q = P$, donc $L = 0$.

f) $\mathcal{Q}_b(P) \Longrightarrow \mathcal{R}_o(P)$: d'après [9] (théorème 3), $\mathcal{R}_o(P)$ est équivalent à : toute martingale bornée L, nulle en 0, telle que $[X,L] = 0$ est nulle. Or, $[X,L] = 0 \Longrightarrow X\,L \in \underline{L} \Longrightarrow L = 0$.

<u>Corollaire 2</u> : Soit $P \in \mathcal{M}_c$, telle que $\mathcal{F}'_o(P)$ soit triviale. Alors,

$$\mathcal{R}_p(P) \iff P \text{ standard} \iff P \in \text{ext}(\mathcal{M}_c).$$

Démonstration : Si $P \in \mathcal{M}_c$, les propriétés $\mathcal{R}_p(P)$ et $\mathcal{R}_o(P)$ sont équivalentes. Rappelons que la première équivalence figure en [9] (théorème 6).

1.4. - On veut dans la suite compléter l'étude de $\mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$ en remplaçant $\mathcal{R}_o(P)$ par un autre type de représentation optionnelle (qui entraîne $\mathcal{R}_o(P)$). Pour cela, on présente dans ce paragraphe différents rappels qui seront nécessaires. La donnée de base est à nouveau un espace filtré général $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vérifiant les conditions habituelles. $\mathcal{P}$ désigne la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Compte tenu de la propriété : tout processus croissant prévisible est localement borné, la démonstration du lemme suivant est immédiate.

Lemme 2 : Soient A et A' deux processus prévisibles, respectivement croissant et à variation bornée sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

1) Les mesures $P_A(')$ définies sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ par

$$E_A(')(\phi) = E\left(\int_0^\infty \phi(s,\omega)\, dA_s^{(')}(\omega)\right)$$

sont σ-finies.

2) Il existe un processus ϕ et un ensemble aléatoire Γ prévisibles tels que : $\begin{cases} dP(\omega) \text{ p.s.}, \ dA'_t(\omega) = \phi(t,\omega)\, dA_t(\omega) + 1_\Gamma(t,\omega)\, dA'_t(\omega) \\ \Gamma \text{ est de } P_A \text{ mesure nulle.} \end{cases}$

En vertu de la seconde partie du lemme 2, il est naturel de dire que $dA'_t(\omega)$ est absolument continue (resp. étrangère) par rapport à $dA_t(\omega)$ si cette propriété est vérifiée pour $P_{A'}$ par rapport à P_A.

On a maintenant besoin de certains résultats et notations sur les sur les mesures aléatoires, qui figurent en [5] : soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable lusinien. On note $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$, ainsi que $\tilde{E} =]0,\infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(]0,\infty[) \otimes \mathcal{E}$. On appelle <u>mesure aléatoire</u> tout noyau positif $\eta(\omega\,;\,dt\times dx)$ de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\tilde{E},\tilde{\mathcal{E}})$. Une mesure aléatoire η est dite prévisible si, pour tout $Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+$, le processus ηY suivant est prévisible :

$$(\eta Y)_t(\omega) = \int_{]0,t]\times E} Y(\omega,s,x)\ \eta(\omega;\ ds,dx).$$

D'après [5] (lemme 2.2), on a la :

<u>Proposition 5</u> : Soit η une mesure aléatoire telle que la mesure P_η définies sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{P}})$ par :

$$\forall Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+ ,\qquad E_\eta(Y) = E\Big(\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.\ ;\ dt\times dx)\Big)$$

soit σ-finie. Il existe alors une unique mesure prévisible, notée η^3 telle que

$$\forall Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+ ,\qquad E\Big(\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\eta(.\ ;\ dt,dx)\Big) = E\Big(\int_{\tilde{E}} Y(.,t,x)\ \eta^3(.\ ;\ dt,dx)\Big) .$$

On peut appliquer ce résultat dans la situation suivante : $E = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, X est une martingale locale réelle et

$$\eta(\omega\ ;\ dt\times dx) = \sum_{s>0} I_{\{\Delta X_s \neq 0\}}\ \varepsilon_s(dt)\varepsilon_{\Delta X_s(\omega)}(dx) .$$

En effet, la mesure P_η est σ-finie : le processus $\sum_{s\leq t} (\Delta X_s)^2 \wedge 1$ est à valeurs finies (car majoré par $[X,X]_t$) et à sauts bornés par 1. Il est donc localement intégrable. Cela signifie qu'il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ P p.s., des constantes $a_n > 0$, tels que la fonction (strictement positive sur $\tilde{\Omega}$) $H(\omega,s,x) = \sum_n a_n 1_{]0,T_n]}(s,\omega)\ x^2 \wedge 1$ soit P_η intégrable ; P_η est donc σ-finie.

On appelle <u>mesure de Lévy</u> de X , et on note $\nu(\omega, ds\times dx)$ la mesure prévisible η^3 . Si $f\in\tilde{\mathcal{P}}$ est tel que le processus $\sum_{s\leq t} |f(s,\Delta X_s)| I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}$ soit localement intégrable (on écrit : $f\in\tilde{\mathcal{P}}_{loc}$) , on note

$$\nu_t(.,f) = \int\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*} \nu(.,ds\times dx)\ 1_{]0,t]}(s)\ f(.,s,x)$$

Soulignons, pour la suite, que si $h\in b(\mathcal{P})$, $f\in\tilde{\mathcal{P}}_{loc}$, on a :

$$\nu_t(.,hf) = \int\int_{]0,t]} h(s)\ d\nu_s(f)\ ,\ \text{où}\ \ (hf)(\omega,s,x) = h(\omega,s)\ f(\omega,s,x)$$

On se restreint maintenant au cas où X est quasi-continue à gauche : à tout $U\in\tilde{\mathcal{H}}^1_{loc} = \{v\in\tilde{\mathcal{P}} | (\sum_{s\leq t} I_{\{\Delta X_s\neq 0\}} v^2(s,\Delta X_s))^{1/2}$ est localement intégrable$\}$

on sait associer, d'après (11), la martingale locale $(U_X)_t = \int_{]0,t]} \frac{U(s,\Delta X_s)}{\Delta X_s} 1_{(\Delta X_s\neq 0)} dX$

C'est l'unique martingale locale L , somme compensée de sauts, telle que :

$$\Delta L_t(\omega) = U(t,\Delta X_t(\omega))\ 1_{\{\Delta X_t(\omega)\neq 0\}}\ .$$

Ces martingales locales figurent également, avec d'autres notations en (4) , article dont on s'est inspiré pour énoncer les définition et proposition suivantes.

<u>Définition 2</u> : On dit que X satisfait la condition de représentation des martingales (et on note $\mathcal{R}'_0(\mathcal{F}',X)$) si, pour toute martingale locale L , nulle en 0 , il existe $\phi\in\mathcal{P}$, $U\in\tilde{\mathcal{H}}^1_{loc}$ tels que $N = \phi . X^c + U_X$. On peut dans cette définition, remplacer "locale" par "bornée" , la démonstration de la proposition 1 s'appliquant encore si l'on introduit l'espace

$$\mathcal{K} = \{(\phi,v) | \phi\in\mathcal{P},\ v\in\tilde{\mathcal{P}}, ||(\phi,v)||_{\mathcal{K}} = E\ (\int_0^\infty \phi^2(s)\ d<X^c,X^c>_s$$
$$+ \sum_{s>0} I_{\{\Delta X_s\neq 0\}}\ v^2(s,\Delta X_s))^{1/2} < \infty\}.$$

<u>Proposition 6</u> : Soit X une martingale locale quasi-continue à gauche. La propriété $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$ est équivalente à

$\Pi_b(\mathcal{F},X)$: la seule martingale bornée L , nulle en 0, telle que

(*) $\qquad E_\eta(\Delta L|\tilde{\mathcal{P}}) = 0^{(1)}$ et $< L^c,X^c > = 0$ est la martingale nulle.

<u>Démonstration</u> : a) $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X) \Rightarrow \Pi_b(\mathcal{F},X)$: soit L martingale bornée vérifiant (*). L admet une décomposition $L = \phi.X^c + U_X$, où $U \in \tilde{\mathcal{P}}$ est un processus borné ,puisque L l'est. D'autre part, $d < L^c,X^c >_t = \phi_t \, d < X^c,X^c >_t = 0$ et donc $\phi_t^2 \, d < X^c,X^c >_t = 0$, ce qui entraîne $L^c = 0$.

D'autre part, un calcul immédiat montre que $E_\eta(\Delta L|\tilde{\mathcal{P}})^{(1)} = U$, et donc $U = 0$, $U_X = 0$, et finalement $L = 0$.

b) $\Pi_b(\mathcal{F}, X) \Rightarrow \mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$: soit L martingale bornée par k , nulle en 0 . La mesure P_η , restreinte à $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{P}})$ étant σ-finie, on peut choisir $U \in \mathcal{H}^1_{loc}$ version de $E_\eta(\Delta L|\tilde{\mathcal{P}})^{(1)}$, bornée par $2k$. D'autre part, utilisons pour L^c la décomposition du lemme 1 en $L^c = \phi.X^c + L'$ où L' est une martingale locale continue telle que $< L',X^c > = 0$. On a donc : $L = \phi.X^c + U_X + L''$, où L'' est une martingale localement bornée, telle que $< (L'')^c,X^c > = 0$ et $E_\eta(\Delta L''|\tilde{\mathcal{P}})^{(1)} = 0$. D'après l'hypothèse, $L'' = 0$ et donc $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$ est réalisée.

1.5. $\quad$ - On reprend ici l'étude de $\mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$ dans le cadre décrit en 1.3. Remarquons auparavant que, si l'on associe à tout $u \in b_f(\tilde{\mathcal{P}})$, où $b_f(\tilde{\mathcal{P}}) = \{v \in \tilde{\mathcal{P}} \,;\, v \text{ borné} \,;\, \sum_{(s \leq t)} v^2(s,\Delta X_s)\, I_{(\Delta X_s \neq 0)} < \infty \text{ p.s.}\}$, le processus $\tilde{u}(\omega,s,x) = u(\omega,s,x) \quad x \in \tilde{\mathcal{P}}$,le processus $\sum_{s \leq t} |\tilde{u}(s,\Delta X_s)|$ est localement intégrable, car :

---

(1) On note encore ΔL le processus $(\omega,s,x) \to \Delta L(\omega,s)$ défini sur $\tilde{\Omega}$.

$$\sum_{s\leq t} |\tilde{u}(s,\Delta X_s)| \leq \left(\sum_{s\leq t} u^2(s,\Delta X_s)\ I_{(\Delta X_s \neq 0)}\right)^{1/2} \left(\sum_{s\leq t} (\Delta X_s)^2\right)^{1/2}$$

et le premier (resp.: second) facteur du membre de droite est un processus localement borné (resp.: intégrable). La mesure prévisible $d\nu_t(\tilde{u})$ est donc bien définie.

Théorème 2 : Soit $P \in \mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$, telle que X soit quasi-continue à gauche sous P. Alors : 1) la propriété $\mathcal{R}'_o(P)$ est vérifiée ;

2) pour tout $u \in b_f(\tilde{\mathcal{P}})$, les mesures prévisibles $d\nu_t(\tilde{u})$ et $d < X^c, X^c >_t$ sont étrangères.

Démonstration : 1) D'après la proposition 5, $\mathcal{R}'_o(P)$ sera réalisée si la seule martingale M bornée, nulle en 0, telle que

(*) $\qquad E_\eta(\Delta M | \tilde{\mathcal{P}}) = 0$ et $< M^c, X^c > = 0$ est nulle.

M étant bornée, et X localement dans $\underline{\underline{H}}^1$, il existe une suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ P p.s., telle que $E\left(\sum_{s\leq T_n} |\Delta M_s|\ |\Delta X_s|\right) < \infty$. D'après (*), on obtient, en posant $\tilde{p}_a(\omega, s, x) = 1_{]u\wedge T_n, t\wedge T_n]}(\omega,s)\ 1_{A_u}(\omega)\ x\ 1_{|x|\leq a}$ lorsque $A_u \in \mathcal{F}_{u\wedge T_n}(P)$:

$E_\eta(\Delta M\ \tilde{p}_a) = 0$, soit en développant :

$$E\left(\sum_{u\wedge T_n < s \leq t\wedge T_n} (\Delta M_s)(\Delta X_s)\ 1_{|\Delta X_s|\leq a}\ 1_{A_u}\right) = 0 ,$$

et donc $E\left([M,X]_{t\wedge T_n} - [M,X]_{u\wedge T_n} ; A_u\right) = 0$. $[M,X]$, et donc MX est une martingale locale, ce qui d'après le théorème 1, entraîne $M = 0$. $\mathcal{R}'_o(P)$ est donc réalisée.

2) Supposons qu'il existe $u \in b_f(\tilde{\mathcal{P}})$ tel que les mesures prévisibles $d\nu_t(\tilde{u})$ et $d < X^c, X^c >_t$ ne soient pas étrangères. D'après le lemme 2, il existe un processus ϕ et un ensemble aléatoire Γ prévisibles tels que : $d\nu_t(\tilde{u}) = \phi_t\ d < X^c, X^c >_t + 1_\Gamma(t)\ d\nu_t(\tilde{u})$, où Γ est de $P_{< X^c, X^c >}$ mesure nulle, et $\phi^2\ d < X^c, X^c > \neq 0$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$

tel que $\phi^2 I_{|\phi|\leq n}\, d < X^c,X^c > \neq 0$. On a donc :

$d\nu_t(1_{\Gamma^c} I_{|\phi|\leq n}\, \tilde{u}) - \phi_t I_{|\phi_t|\leq n}\, d < X^c,X^c >_t = 0$. La martingale localement bornée $M = -\phi\, I_{|\phi|\leq n}.X^c + (1_{\Gamma^c} I_{|\phi|\leq n} u)_X$ est donc telle que MX est encore une martingale locale, ce qui entraîne $M = 0$, et donc $\phi\, I_{|\phi|\leq n}.X^c = 0$, ou $\phi^2 I_{|\phi|\leq n}\, d < X^c,X^c > = 0$, ce qui est contraire à la supposition faite. Le théorème est donc démontré.

Inversement, on ne sait énoncer qu'une réciproque partielle : le théorème suivant est à comparer avec un résultat très analogue qui figure dans l'appendice de (1), où il est montré que la propriété de représentation prévisible par rapport à une martingale fondamentale, pour les tribus d'un processus à accroissements indépendants et stationnaires ne peut être réalisée que si celui-ci est le mouvement brownien, ou le processus de Poisson.

Théorème 3 : Soit $P \in \mathcal{M}_d$. On suppose que $\mathcal{R}'_o(P)$ est réalisée, et qu'il existe un processus prévisible f tel que $\Delta X_s = f_s\, 1_{(\Delta X_s \neq 0)}$. La mesure aléatoire $\mu(\omega,du) = \sum_{(s>0)} \varepsilon_s(du)\, I_{(\Delta X_s \neq 0)}$ est alors $\mathcal{P}$ σ-finie. Soit ξ sa projection prévisible.

Alors, P est extrémale dans $\mathcal{M}_d$ si, et seulement si :

1) $\mathcal{F}_o(P)$ est triviale ;

2) les mesures $d < X^c,X^c >$ et $d\xi$ sont étrangères.

Sous les mêmes hypothèses, si X est localement de carré intégrable sous P , on peut remplacer ξ par $d < X^d,X^d >$.

Enfin la propriété $\mathcal{R}_p(P)$ est vérifiée sous ces hypothèses lorsque $P \in \mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$.

Démonstration : a) Montrons que μ est $\mathcal{P}$ σ-finie. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout processus g mesurable positif, on a :

$$\int g(s,\omega)\ 1_{|f(s,\omega)|\geq\varepsilon}\ \mu(\omega,ds) = \sum_{(s>0)} g(s,\omega)\ 1_{|\Delta X_s(\omega)|\geq\varepsilon} \ .$$

Or, le processus $\sum_{s\leq .} 1_{|\Delta X_s|\geq\varepsilon}$ est croissant, à valeurs finies, et ses sauts sont d'amplitude égale à 1 . Il est donc localement borné, et la mesure $1_{|f(.,\omega)|\geq\varepsilon}\ d\mu(\omega,.)$ est $\mathcal{P}$ σ-finie. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe donc $H^{(n)}$ processus prévisible, strictement positif tel que :

$E\left(\int H^n\ (.,\omega)\ 1_{(\frac{1}{n}>|f(.,\omega)|\geq\frac{1}{n+1})}\ d\mu(\omega,.)\right) < \infty$. De même, il existe K processus prévisible strictement positif tel que

$E\left(\int K(.,\omega)\ 1_{|f(.,\omega)|\geq 1}\ d\mu(\omega,.)\right) < \infty$. Il existe donc une suite (a_n) de réels strictement positifs, tels que, si l'on pose

$$H(s,\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\ H^n(s,\omega)\ 1_{\frac{1}{n}>|f(s,\omega)|\geq\frac{1}{n+1}}$$
$$+ K(s,\omega)\ 1_{|f(s,\omega)|\geq 1} + 1_{f(s,\omega)=0} \ ,$$

on ait $E\left(\int H(s,\omega)\mu(\omega,ds)\right) < \infty$. Comme H est strictement positif, on a le résultat cherché.

b) Supposons 1) et 2) réalisées : soit M une martingale bornée, nulle en 0, telle que $< M,X > = 0$. Par hypothèse, M admet une représentation $M = \phi.X^c + u_X$, où $u\in b_f(\widetilde{\mathcal{P}})$ et $\phi\in\mathcal{P}$. Posons $\psi(\omega,s) = u(\omega,s,f_s)\ 1_{f_s\neq 0}\in\mathcal{P}$. On a donc $M = \phi.X^c + \psi_X$, et $d < M,X > = \phi\ d < X^c,X^c > + f\ \psi\ d\xi = 0$. Les mesures $d < X^c,X^c >$ et $d\xi$ étant étrangères, ceci entraîne $\phi\ d < X^c,X^c > = 0$, et $f\ \psi\ d\xi = 0$, d'où

$\phi . X^c = 0$, et $E\left(\sum_s |f_s||\psi_s| \, 1_{(\Delta X_s \neq 0)}\right) = 0$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$E\left(\sum_s |f_s||\psi_s| \, 1_{|\Delta X_s| \geq \frac{1}{n}}\right) = 0$, et donc $E\left(\sum_s |\psi_s| \, 1_{|\Delta X_s| \geq \frac{1}{n}}\right) = 0$. Finalement,

$E_\eta \, |\psi| = 0$, $\psi_X = 0$, $M = 0$, et $P \in \mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$.

c) Inversement, soit $P \in \mathrm{ext}(\mathcal{M}_d)$. La condition 1) est évidemment nécessaire. D'autre part, le processus $u_\varepsilon(\omega,s,x) = 1_{|x| \geq \varepsilon}$ appartient à $b_f(\tilde{\mathcal{P}})$. Donc, d'après le théorème 2 , les mesures $d\nu(\tilde{u}_\varepsilon)$ et $d < X^c,X^c >$ sont étrangères. Or, d'après l'hypothèse faite sur ΔX , on a : $d\nu(\tilde{u}_\varepsilon) = f \, I_{|f| \geq \varepsilon} \, d\xi$. Les mesures $\frac{1}{f}(f \, I_{|f| \geq \varepsilon} \, d\xi)$ et $d < X^c,X^c >$ sont donc étrangères, ainsi que $d\xi = I_{|f|>0} \, d\xi$ et $d < X^c,X^c >$.

d) Supposons $X \in \underline{\underline{M}}_{loc}$. Alors, $d < X^d,X^d > = f^2 \, d\xi$, et donc $d < X^d,X^d >$ est étrangère à $d < X^c,X^c >$. Inversement, si ces deux mesures sont étrangères, il en est de même de $f^2 \, 1_{|f| \geq \frac{1}{n}} \, d\xi$ et $d < X^c,X^c >$, donc de $I_{|f| \geq \frac{1}{n}} \, d\xi$ et $d < X^c,X^c >$ pour tout n , ce qui entraîne que $d\xi = I_{|f|>0} \, d\xi$ et $d < X^c,X^c >$ sont étrangères.

e) La fin du théorème découle aisément des hypothèses faites et de 2).

1.6. - Ce paragraphe est constitué de diverses remarques, complétant l'étude faite précédemment. On se place à nouveau sur un espace filtré général $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, pour lequel X est une martingale locale quasi-continue à gauche.

r.1. On examine tout d'abord quelques conséquences de la propriété $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$.

Proposition 7 : Si la propriété $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$ est réalisée, on a :

- $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma(X)$, où $\mathcal{O}$ désigne la tribu optionnelle sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$
- pour tout $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt T , $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-} \vee \sigma(X_T\, 1_{T<\infty})$.

En particulier, la famille $\mathcal{F}_t$ n'a pas de temps de discontinuité.

Démonstration : Remarquons de façon générale (la propriété $\mathcal{R}'_o(\mathcal{F},X)$ n'intervient pas ici) que $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma(M; M\ \mathcal{F}_t$ martingale bornée) $(=\mathcal{C})$. En effet, d'après le théorème de classe monotone, il suffit de démontrer que la projection optionnelle des processus mesurables bornés $H = Z\, 1_{[\![r,s[\![}$ $(Z\in\mathcal{F}\ ;\ r,s\in\mathbb{R}_+)$ est $\mathcal{C}$-mesurable. Or, ${}^1H_t = Z_t\, 1_{[r,s[}(t)$, où Z_t est une version continue à droite de $E\left(Z|\mathcal{F}_t\right)$, d'où le résultat $\mathcal{O} = \mathcal{C}$. Soit maintenant M une martingale bornée. D'après l'hypothèse, il existe donc $u \in \tilde{\mathcal{P}}$ tel que : $M_t = M^c_t + M^d_{t-} + u(t,\Delta X_t)\, 1_{\{\Delta X_t\neq 0\}}$, d'où $\mathcal{O} = \mathcal{P} \vee \sigma(X)$. Le second résultat découle du premier, car $\mathcal{F}_T$ est engendrée par $Z_T\ 1_{(T<\infty)}$, pour $Z\in\mathcal{O}$, et si $H\in\mathcal{P}$, $H_T\, 1_{(T<\infty)}\in\mathcal{F}_{T-}$. La fin de la proposition découle de la quasi-continuité à gauche de X .

r.2. On donne maintenant une condition suffisante pour que la propriété $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$ soit satisfaite. Pour simplifier la présentation, on suppose X continue.

Proposition 8 : Soit X martingale locale continue. On note Δ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}_+$, déterministes, bornées, et nulles hors d'un compact.

Si pour tout t, les variables aléatoires

$$E^f_t = \exp\left((f.X)_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\, d<X,X>_s\right) \quad (f\in\Delta) \text{ sont totales dans } L^2(\mathcal{F}_t) ,$$

alors $\mathcal{F}_o$ est triviale et la propriété $\mathcal{R}_p(\mathcal{F},X)$ est réalisée.

On a le même résultat en remplaçant les variables $(E_t^f, f\in\Delta)$ par 1 et $(H_n^f)_t = H_n((f.X)_t, \int_0^t f^2(s)\, d<X,X>_s)$, $(f\in\Delta, n\in\mathbb{N})$, où $H_n(x,t)$ désigne le nième polynôme de Hermite.

Démonstration : Supposons, par exemple, que pour tout t , les variables $(E_t^f, f\in\Delta)$ sont totales dans $L^2(\mathcal{F}_t)$. Fixons t .

Soit $\Lambda_t = \{Y = a + \int_0^t H(s)\, dX_s$; a=cte ; $H\in\mathcal{P}$ et

$$E\int_0^t H^2(s)\, d<X,X>_s < \infty\} .$$

Λ_t est un sous-espace fermé de $L^2(\mathcal{F}_t)$, qui contient les variables E_t^f .

En effet, d'après la formule d'Ito, on a : $E_t^f = 1 + \int_0^t E_s^f\, f(s)\, dX_s$. Il reste à montrer $E(\int_0^t (E_s^f)^2\, f^2(s)\, d<X,X>_s) < \infty$ pour que E_t^f appartienne à Λ_t . Or, la martingale $(E_s^f, s\geq 0)$ de carré intégrable pour tout s , admet pour processus croissant $A_s^f = \int_0^s (E_u^f)\, f^2(u)\, d<X,X>_u$. On a donc $E(A_t^f) < \infty$. D'où : $E_t^f\in\Lambda_t$, et donc $\Lambda_t = L^2(\mathcal{F}_t)$. Ceci entraîne, par recollement, que toute martingale M_t de carré intégrable pour tout t admet une représentation $M_t = a + \int_0^t H(s)\, dX_s$, où a = cte , et H processus prévisible, d'où le résultat .

La formule $(H_n^f)_t = \int_0^t (H_{n-1}^f)_s\, f(s)\, dX_s$ entraîne le même résultat lorsque les variables 1 et $(H_n^f)_t$ $(f\in\Delta, n\in\mathbb{N})$ sont totales dans $L^2(\mathcal{F}_t)$.

Rappelons que la démonstration "usuelle" de $\mathcal{R}_p(X)$ pour X mouvement brownien (ou même processus de Poisson, en utilisant une formule exponentielle adéquate) est celle que l'on vient d'écrire.

r.3. Soit P probabilité sur Ω_c , qui appartient à $\mathcal{M}_c$, et telle que $X_o = 0$ P p.s. Supposons que $< X,X >$ (processus croissant associé à X sous P) vérifie $< X,X >_\infty = \infty$ P p.s. Soit $Y_t = X_{\tau_t}$, où τ_t est le changement de temps inverse de $< X,X >_t$. Il est bien connu que Y est un mouvement brownien. En conséquence, si $Q \simeq P$, $Q \in \mathcal{M}_c$, on a $Q = P$ sur $\mathcal{F}_\infty(Y)$, car la mesure de Wiener est standard. Ainsi, si $\mathcal{F}_\infty(Y) = \mathcal{F}_\infty(X)$ (ou, ce qui est équivalent : pour tout t , $< X,X >_t \in \mathcal{F}_\infty(Y)$), on a : $Q = P$; P est donc standard, et donc extrêmale dans $\mathcal{M}_c$, d'après le théorème 1 .

Voici un contre-exemple, qui m'a été communiqué par H.Kunita en 1975, montrant en particulier que la propriété d'extrêmalité de $P \in \mathcal{M}_c$ ne découle pas automatiquement de $< X,X >_\infty = \infty$ P p.s. Soit $Z = (B^1,B^2)$ le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Considérons $Y_t = \int_0^t B^1_u \, dB^2_u$. On a $< Y,Y >_\infty = \int_0^\infty (B^1_u)^2 \, du = \infty$ P p.s., d'après la propriété de récurrence du mouvement brownien linéaire. Comme $\frac{d< Y,Y >_t}{dt} = (B^1_t)^2$, la martingale $(B^1_t)^2-t$ est adaptée aux tribus $\mathcal{F}_t(Y)$. Si $\mathcal{R}_p(Y)$ était vérifiée, la $\mathcal{F}_t(Z)$ martingale $(B^1_t)^2-t$ admettrait une représentation prévisible par rapport à Y , donc par rapport à B^2. Or, on a : $(B^1_t)^2-t = 2\int_0^t B^1_s \, dB^1_s$. $(B^1_t)^2-t$ serait donc orthogonale à elle-même, et donc nulle, ce qui n'est pas. La propriété $\mathcal{R}_p(Y)$ n'est donc pas vérifiée.

r.4. Contrairement à ce qui se passe pour $\mathcal{M}_c$ et $\mathcal{M}_d$, la recherche des points extrémaux de $\mathcal{S}_{d/c}$, ensemble des lois de semi-martingales sur $\Omega_{d/c}$, est très simple, et sans intérêt.

<u>Proposition 9</u> : Les points extrémaux de $\mathcal{S}_d$ (resp. $\mathcal{S}_c$) sont les mesures ε_a, où a est une fonction à variation bornée (continue) sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

<u>Démonstration</u> : Soit $P \in \text{ext}(\mathcal{S}_d)$ par exemple. Si L est une martingale bornée par k, nulle en 0, les probabilités $P_1 = (1 - \frac{L_\infty}{2k})P$ et $P_2 = (1 + \frac{L_\infty}{2k})P$ appartiennent à $\mathcal{S}_d$, d'après (4), et donc $L = 0$. Toute martingale bornée est donc constante, ce qui entraîne facilement le résultat.

r.5. Dans le cas où le processus des sauts de X, c'est à dire ΔX, est localement borné pour P, on peut caractériser la propriété : $P \in \text{ext}(\mathcal{M}_d)$, et montrer d'ailleurs que l'hypothèse faite dans le théorème 3 est naturelle.

<u>Proposition 10</u> : Soit $P \in \mathcal{M}_d$, telle que X soit continue à gauche et le processus ΔX localement borné sous P. On a alors :

$$P \in \text{ext}(\mathcal{M}_d) \iff \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}_p(P) \\ \mathcal{F}_0(P) \text{ est } P \text{ triviale.} \end{array} \right.$$

De plus, il existe un processus prévisible f tel que $\Delta X = f\, I_{\Delta X \neq 0}$.

<u>Démonstration</u> : On a montré dans le théorème 1, l'implication $\Longleftarrow$. Inversement, soit $P \in \text{ext}(\mathcal{M}_d)$. Il est évident que $\mathcal{F}_0(P)$ est P-triviale.

D'autre part, soit M martingale bornée, nulle en 0 et $M = \phi.X + L$ la décomposition prévisible de M par rapport à X, rappelée dans le lemme 1. On peut supposer le processus prévisible ϕ partout fini. On a : $< X,L > = 0$. Par arrêt, on peut considérer le processus ΔX borné. D'autre part, on a $\Delta M = \phi \times \Delta X + \Delta L$. Cette égalité entraîne que la martingale $L^{(n)} = 1_{|\phi| \leq n} . L$ est localement bornée, car $\Delta L^{(n)}$ est un processus borné. Comme l'on a encore $< L^{(n)},X > = 0$, et que la propriété $\mathcal{Q}_b(P)$ est vérifiée (théorème 1), on en déduit : $L^{(n)} = 0$, et en faisant tendre n vers $+\infty$, $L = 0$, d'où $\mathcal{R}_p(P)$.

En particulier, la martingale locale $[X,X] - < X,X >$ admet une représentation prévisible $f.X$. X étant quasi-continue à gauche, on en déduit $(\Delta X)^2 = f \times \Delta X$, d'ou le résultat cherché.

2. Représentation intégrale des martingales de carré intégrable.

2.1. - On considère les espaces $(\Omega_c^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ suivants :

$\Omega_c^\circ = \mathbb{R}$;

$\Omega_c^n = C([0,n], \mathbb{R})$ pour $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 1$

$\Omega_c^\infty = \Omega_c$, munis de la topologie usuelle pour $n = 0$, et de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact pour $n \geq 1$. Les espaces $\mathcal{M}_b(\Omega_c^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ sont munis de la topologie de la convergence étroite correspondante ; $\mathcal{M}_b(\Omega_c)$ est alors la limite projective topologique du système

$$\mathcal{M}_b(\Omega_c^\circ) \leftarrow \mathcal{M}_b(\Omega_c^1) \leftarrow \ldots \mathcal{M}_b(\Omega_c^n) \xleftarrow{r_n} \mathcal{M}_b(\Omega_c^{n+1}) \ldots$$

$$r_n(\mu) \longleftarrow \mu$$

où $r_n(\mu)\in\mathcal{M}_b(\Omega_c^n)$ est l'image de $\mu\in\mathcal{M}_b(\Omega_c^{n+1})$ par l'application

$$r_n : \Omega_c^{n+1} \to \Omega_c^n$$
$$\omega \to \omega|(0,n) .$$

Tout sous-ensemble de l'un de ces espaces de mesures est muni de la topologie induite par la topologie de l'espace en question.

Pour tout $\infty > p > 1$, $\mathcal{H}_c^p$ désigne le cône des mesures P positives bornées sur Ω_c , faisant de X une martingale telle que : $\forall t \geq 0$, $\int |X_t|^p \, dP < \infty$. D'après l'inégalité de Doob, il est équivalent de prendre pour condition d'intégrabilité : $\forall t \geq 0$, $\int \sup_{s \leq t} |X_s|^p \, dP < \infty$. Il est donc naturel de définir $\mathcal{H}_c^1$ comme le cône des mesures positives bornées sur Ω_c faisant de X une martingale telle que : $\forall\ t \geq 0$, $\int \sup_{s \leq t} |X_s| \, dP < \infty$ (mais, pour $p = 1$, l'inégalité de Doob n'est plus valable). $\tilde{\mathcal{M}}_c$ est le cône engendré par $\mathcal{M}_c$. Si C est un cône, on note ext (C) l'ensemble des génératrices extrémales de C .

Le lemme suivant permet de se ramener - pour les mesures extrémales - à la premiere partie du travail :

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $\infty > p \geq 1$, $\text{ext}\,(\mathcal{H}_c^p) = \text{ext}(\tilde{\mathcal{M}}_c) \cap \mathcal{H}_c^p$.

<u>Démonstration</u> : L'inclusion $\mathcal{H}_c^p \subset \tilde{\mathcal{M}}_c$ entraîne $\mathcal{H}_c^p \cap \text{ext}(\tilde{\mathcal{M}}_c) \subseteq \text{ext}(\mathcal{H}_c^p)$. Inversement, soit $P \in \text{ext}(\mathcal{H}_c^p)$, et $P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_c$, tels que $P = P_1 + P_2$. On a donc : $\forall\ t$, $E_i(\sup_{s \leq t} |X_s|^p) < \infty$ $(i = 1,2)$.

D'autre part, comme p est supérieur ou égal à 1 , les temps d'arrêt constants $T_n = n$ sont tels que $E(\sup_s |X_{s \wedge n}|) < \infty$, et donc, d'après la proposition 4, pour tout n , $(X_{t \wedge n}, t \geq 0)$ est une P_i martingale uniformément intégrable, c'est à dire que $(X_t, t \geq 0)$ est une P_i-martingale. Finalement, $P_i \in \mathcal{H}_c^p$ $(i = 1,2)$ ce qui entraîne $P_1 = \lambda P_2$, et P appartient à une génératrice extrémale de $\tilde{\mathcal{M}}_c$.

Le théorème suivant permettra d'appliquer la théorie de Choquet :

<u>Théorème 4</u> : Pour tout $\infty > p \geq 1$, $\mathcal{H}_c^p$ est la réunion de ses châpeaux, qui sont métrisables.

<u>Démonstration</u> : On fait d'abord la démonstration pour $p > 1$. Soit donc $\mu \in \mathcal{H}_c^p$, et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Doob, on a : $\mu(\sup_{t \leq n} |X_t|^p) < \infty$. Ceci entraîne l'existence d'une sous-suite $(p_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$, $p_k^n \uparrow +\infty$ lorsque $k \uparrow \infty$, telle que :

$$\ell_n(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \, \mu\Big(\sup_{\substack{t,t' \leq n \\ |t-t'| \leq 1/p_k^n}} |X_t - X_{t'}|\Big) < \infty .$$

Il existe également deux suites (a_n) et (b_n) de constantes positives telles que

$$\ell(\mu) = \sum_n a_n \, \mu(\sup_{s \leq n} |X_s|^p + 1) < \infty$$

et

$$b_o \, \ell(\mu) + \sum_{n \geq 1} b_n \, \ell_n(\mu) = 1 .$$

Posons alors, pour $\nu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_c)$, $p(\nu) = b_o \, \ell(\nu) + \sum_{n \geq 1} b_n \, \ell_n(\nu)$. p est une limite croissante de fonctions semi-continues inférieurement pour la topologie de la convergence étroite et est donc semi-continue inférieurement. $H = \{\nu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega_c) \,/\, p(\nu) \leq 1\}$ est donc fermé. Montrons maintenant qu'il est relativement compact (donc compact) : $\mathcal{M}_b^+(\Omega_c)$ étant la limite projective topologique du système $(\mathcal{M}_b^+(\Omega_c^n), r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il s'agit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H^{(n)} = r_n(H)$ est relativement compact. Or, si $\nu \in H^{(n)}$, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} k \, \nu\Big(\sup_{\substack{t,t' \leq n \\ |t-t'| \leq 1/p_k^n}} | X_t - X_{t'}|\Big) \leq \frac{1}{b_n} \\ \nu(1+|X_o|^p) \leq \dfrac{1}{a_o b_o} \end{cases}$$

On déduit de la première inégalité :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall \nu \in H^{(n)}, \quad \nu\Big(\sup_{\substack{t,t'\leq n \\ |t-t'|\leq \eta(\varepsilon)}} |X_t - X_{t'}|\Big) \leq \varepsilon$$

et donc : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \lambda > 0$, $\exists \eta(\varepsilon,\lambda) > 0$ tel que

$$(\alpha) \qquad \forall \nu \in H^{(n)}, \quad \nu\Big(\sup_{\substack{t,t'<n \\ |t,t'|\leq \eta(\varepsilon,\lambda)}} |X_t - X_{t'}| \geq \lambda\Big) \leq \varepsilon$$

De la seconde inégalité, on déduit :

$$(\beta) \qquad \sup_{H^{(n)}} \nu(\Omega_c^n) \leq 1/a_o b_o < \infty ,$$

et

$(\gamma) \forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda(\varepsilon)$ tel que : $\forall \nu \in H^{(n)}$, $\nu(|X_o| \geq \lambda(\varepsilon)) \leq \varepsilon$.

D'après le critère de Prokhorov sur Ω_c^n ([8], page 214, théorème 2.2) , les propriétés (α) , (β) , (γ) entraînent que $H^{(n)}$ est relativement compact. Pour que $W = H \cap \mathcal{H}_c^p$ soit un châpeau de $\mathcal{H}_c^p$, il suffit donc que W soit fermé dans $\mathcal{M}_b^+(\Omega_c)$. Soit $(\nu_i)_{i\in I}$ famille de mesures de W convergeant étroitement suivant le filtre $\mathcal{F}$ vers $\nu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega_c)$. Il s'agit de montrer que pour tout $(n+1)$ uplet $\sigma = (s_1 < s_2 < \ldots < s_n = s < t)$ et toute fonction $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$\begin{cases} (\delta) \quad \nu\, |X_t|^p < \infty \\ (\varepsilon) \quad \nu\big(g(X_{s_1},\ldots,X_{s_n})\, X_t\big) = \nu\big(g(X_{s_1},\ldots,X_{s_n})\, X_s\big) \end{cases}$$

Si $\lambda \in \mathcal{M}_b^+(\Omega_c)$, notons λ^σ l'image de λ sur $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ par l'application $\omega \to (X_{s_1}(\omega),\ldots, X_{s_n}(\omega), X_t(\omega))$ et $\underline{\lambda}^\sigma$ la mesure définie par $d\underline{\lambda}^\sigma(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (1 + |x_1| + \ldots + |x_{n+1}|)\, d\lambda^\sigma(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Or, la définition de H entraîne l'existence d'une constante $k_\sigma < \infty$ telle que $(*) \forall \lambda \in W$, $\sum_{u\in\sigma} \int (1 + |X_u|^p)\, d\lambda \leq k_\sigma$.

En particulier, $\nu|X_t|^p \leq \underset{\mathcal{F}}{\underline{\lim}}\ \nu_i|X_t|^p \leq k_\sigma$ ((δ) est vérifié) .

D'autre part, soit $\mathcal{U} = \{\underline{\lambda}^\sigma\ ;\ \lambda \in W\} \subset \mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^{n+1})$. D'après (*) , $\mathcal{U}$ satisfait au critère de Prokhorov, car il existe une constante k'_σ telle que : $\forall\ \pi \in \mathcal{U}$, $\int \frac{(1+|x_1|^p+\ldots+|x_{n+1}|^p)}{1+|x_1|+\ldots+|x_{n+1}|}\, d\pi \leq k'_\sigma$ et la fonction

$$U(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1+|x_1|^p+\ldots+|x_{n+1}|^p}{1+|x_1|+\ldots+|x_{n+1}|}$$ tend vers 0 lorsque $|x| = \sum_1^{n+1} |x_i| \to \infty$.

Sur $\mathcal{U}$, la topologie de la convergence étroite coïncide donc avec celle de la convergence simple sur les fonctions de la forme $\frac{\phi(x_1,\ldots,x_{n+1})}{1+|x_1|+\ldots+|x_{n+1}|}$ pour $\phi \in C_b(\mathbb{R}^{n+1})$. Ainsi, $\nu_i^\sigma \xrightarrow[\mathcal{F}]{(e)} \nu^\sigma$ entraîne que $\underline{\nu}_i^\sigma \xrightarrow[\mathcal{F}]{(e)} \underline{\nu}^\sigma$. Donc, $\underline{\nu}_i^\sigma(h) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \underline{\nu}^\sigma(h)$ pour $h(x_1,\ldots,x_{n+1})$ égale à $\frac{g(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1}}{1+|x_1|+\ldots+|x_{n+1}|}$ ou $\frac{g(x_1,\ldots,x_n)x_n}{1+|x_1|+\ldots+|x_{n+1}|}$, avec $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Ceci entraîne (ε) et W est un châpeau de $\mathcal{H}_c^p$.

Précisons la modification qu'il faut apporter à la démonstration lorsque $p = 1$. Soit donc $\mu \in \mathcal{H}_c^1$. Si pour $n \in \mathbb{N}$, on note μ_n^* la loi sous μ de $\sup_{t\leq n} |X_t|$, il existe une suite (a_n) telle que $\sum_n a_n \int_{\mathbb{R}_+} \mu_n^*(dt)\ (1+t) < \infty$. Soit η la mesure bornée $\sum_n a_n\, \mu_n^*$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\int_{\mathbb{R}_+} \eta(dt)\ t < \infty$, il existe d'après le théorème de La Vallée-Poussin ((7)-II-T22) une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue, croissante, positive, convexe, telle que $\frac{g(t)}{t} \xrightarrow[(t\to\infty)]{} \infty$, et $\int_{\mathbb{R}_+} \eta(dt)\ g(t) < \infty$. Posons alors

$\ell(\mu) = \sum_n b_n \int \mu(d\omega)\ (1 + g(\sup_{t \leq n} |X_t|)) < \infty$. On peut alors reprendre la démonstration précédente en remplaçant la fonction $u \to u^p$ définie sur $\mathbb{R}_+$, par la fonction g .

Enfin, $\mathcal{M}_b^+(\Omega_c)$ étant un espace polonais, les chapeaux de $\mathcal{H}_c^p$ $(\infty > p \geq 1)$ sont métrisables.

Remarque : La démonstration est inspirée de la rédaction de C. Dellacherie ([2]) pour la question voisine de la représentation intégrale des surmartingales à temps discret.

2.2. - On étend maintenant au cône $\mathcal{H}_d^p$ $(1 \leq p < \infty)$ (définition évidente) les résultats obtenus pour $\mathcal{H}_c^p$. On note $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des homothétiques des lois de $\mathcal{M}_d$ et ext $(\tilde{\mathcal{M}}_d)$ l'ensemble $\mathbb{R}_+ \cdot$ ext $(\mathcal{M}_d)$.

L'espace Ω_d est muni de la topologie (σ) de la convergence de Skorokhod sur tout compact, dont la définition et les principales propriétés (figurant en [6]) sont développées en appendice : signalons seulement que dans les livres usuels de référence sur le sujet ([8], par exemple), est seulement étudiée la topologie de Skorokhod sur Ω_d^n = Cadlag ([0,n],$\mathbb{R}$), toute fonction de Ω_d^n étant supposée continue à gauche en n , ce qui crée quelques difficultés-résolues en [6] - pour étendre de façon naturelle la définition de la topologie de Skorokhod à Ω_d.

L'espace $\mathcal{M}_b(\Omega_d)$ est muni de la topologie étroite correspondant à la topologie (σ) sur Ω_d . Tout sous-ensemble borélien de $\mathcal{M}_b(\Omega_d)$ est muni de la topologie induite.

Le résultat et la démonstration du lemme 3 se transposent sans changement dans ce cadre :

Lemme 3' : Pour tout $\infty > p \geq 1$, ext $(\mathcal{H}_d^p)$ = ext $(\tilde{\mathcal{M}}_d) \cap \mathcal{H}_d^p$.
La démonstration du lemme suivant est immédiate :

Lemme 4 : Soit $(X,\mathcal{X})$ espace polonais muni de sa tribu borélienne. Soit $(f_t)_{0 \leq t < A}$ une famille de fonctions positives définies sur X et possédant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in X$, l'application $t \to f_t(x)$ est continue à droite ;

(ii) pour toute mesure positive bornée ν sur $(X,\mathcal{X})$, pour presque tout $t < A$, la fonction f_t est continue hors d'un ensemble de ν mesure nulle (on dira : est ν p.s. continue) .

Alors, l'application $\nu \to \nu(\sup_{0 \leq t < A} f_t)$ est étroitement semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_b^+(X)$.

Théorème 4' : Pour tout $\infty > p \geq 1$, $\mathcal{H}_d^p$ est la réunion de ses châpeaux qui sont métrisables.

Démonstration : On suit celle du théorème 4 , en indiquant seulement les points qu'il faut modifier. Soit donc $\infty > p > 1$ et $\mu \in \mathcal{H}_d^p$. Alors,

1) il existe une suite (a_n) de nombres strictement positifs

telle que : $r(\mu) = \sum_n a_n \, \mu(1 + \sup_{t<n} |X_t|^p) < \infty$;

2) il existe une suite d'entiers $p_k \uparrow \infty$, lorsque $k \uparrow \infty$,

telle que : $s(\mu) = \sum_k k \, \mu(\sup_{t,t'<1/p_k} |X_t - X_{t'}|) < \infty$;

3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(q_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers, croissant vers $+\infty$, telle que :

$$u_n(\mu) = \sum_k k \, \mu(\sup_{n-1/q_k^n \leq t < t' < n} |X_t - X_{t'}|) < \infty \quad ;$$

4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(y^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers, croissant vers $+\infty$, telle que :

$$v_n(\mu) = \sum_k k\,\mu\Big(\sup_{\substack{t_1<t_2<n \\ |t_1-t_2|\leq 1/y^n_k}} \ \sup_{t_1<t<t_2} \min(|X_t-X_{t_1}|;|X_t-X_{t_2}|)\Big) < \infty .$$

Donc, il existe une suite (b_n) de réels strictement positifs telle que :

$$p(\mu) = b_o(r(\mu)+s(\mu)) + \sum_{n\geq 1} b_n(u_n(\mu)+v_n(\mu)) = 1 .$$

D'après le lemme 4, et le théorème A.3, $H = \{\nu \in \mathcal{M}^+_b(\Omega_d)/p(\nu) \leq 1\}$ est étroitement compact.

Il reste à montrer que $W = H \cap \mathcal{H}^p_d$ est fermé dans $\mathcal{M}^+_b(\Omega_d)$. Soit donc $(\nu_i)_{i\in I}$ famille de mesures de W convergeant étroitement vers ν. On aura le résultat cherché si pour tout $q \in \mathbb{N}$, et tout $(n+1)$ uplet $\sigma = (s_1<s_2<\ldots<s_n = s<t)$ tel que les applications $\omega \to X_u(\omega)$ $(u\in\sigma)$ soient ν p.s. continues, on a : (δ') $\nu\big(\sup_{r<q} |X_r|^p\big) < \infty$ et
(ε') $\forall g \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $\nu\big(g(X_{s_1},\ldots,X_{s_n})\,X_t\big) = \nu\big(g(X_{s_1},\ldots,X_{s_n})\,X_s\big)$. Or, il existe une constante α_q telle que : $\forall \lambda \in W$, $\lambda\big(\sup_{r<q} |X_r|^2\big) \leq \alpha_q$.
D'après le lemme 4, on a donc (δ'). D'après le choix du $(n+1)$ uplet σ, on a : $\nu^\sigma_i \xrightarrow[\mathcal{F}]{(e)} \nu^\sigma$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. La fin de la démonstration est alors identique à celle du théorème 4 pour $p > 1$. Pour $p = 1$, on procède de même qu'au théorème 4.

Voici maintenant le résultat de représentation pour $\mathcal{H}^p_{d/c}$ qui découle du théorème 4, à l'aide du théorème de Choquet (voir, par exemple, (7), XI, T 24, T25 et 37) : Soit $P\in \mathcal{H}^p_{d/c}$. Il existe un châpeau $W = (\ell \leq 1)^{(1)}$ de $\mathcal{H}^p_{d/c}$ tel que $\ell(P) = 1$, et une mesure de probabilité Π sur $\mathcal{M}^+_b(\Omega_{d/c})$, portée par $\mathrm{ext}(\mathcal{H}^p_{d/c}) \cap (\ell=1)$, qui est un ensemble borélien, telle que :

(1) $\ell : \mathcal{H}^p_{d/c} \to [0,\infty]$ est une fonction additive, positivement homogène et semi-continue inférieurement.

$$\forall f \in b(\mathcal{F}_\infty^o)\ ,\ E_P(f) = \int_{\mathrm{ext}(\mathcal{H}_{d/c}^P)} \nu(f)\, d\Pi(\nu)\ .$$

On en déduit, par un argument de normalisation utilisé en [2] (page 16), que si P est une probabilité de $\mathcal{H}_{d/c}^P$, il existe une mesure de probabilité Λ portée par $\mathrm{ext}(\mathcal{M}_{d/c}) \cap \mathcal{H}_{d/c}^P$ telle que :

$$\forall f \in b(\mathcal{F}_\infty^o)\ ,\ E_P(f) = \int_{\mathrm{ext}(\mathcal{M}_{d/c})} \nu(f)\, d\Lambda(\nu)\ .$$

Appendice :

La définition de la topologie de Skorokhod sur tout compact, définie sur $\Omega_d = \{\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues à droite et limitées à gauche$\}$, et notée ici (σ) , ainsi que les propriétés énoncées ci-dessous sont empruntées à [6] .

On appelle changement de temps toute application λ strictement croissante et continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, et on note

$$|\lambda| = \sup_{t \geq 0} |\lambda(t)-t| + \sup_{s \neq t} \left|\operatorname{Log} \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| .$$

Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans Ω_d pour (σ) si, pour tout entier n , il existe une suite de changement de temps $(\lambda_k^n)_{k \geq 1}$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda_k^n| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{0 \leq t \leq n} |x(t)-x_k(\lambda_k^n(t))| = 0 .$$

Voici les propriétés qui sont utilisées dans cet article :

Proposition A1 : L'espace Ω_d , muni de la topologie (σ) est un espace polonais, dont la tribu borélienne est $\mathcal{F}_\infty^o = \sigma\{X_s, s \in \mathbb{R}_+\}$ où $X_s(\omega) \equiv \omega(s)$.

Proposition A2 : (i) si la suite $(x_k, k \geq 1)$ converge vers x pour (σ) , alors $x_k(t)$ tend vers $x(t)$ pour tout point t de continuité de x .

(ii) Pour toute mesure positive bornée ν sur $(\Omega_d, \mathcal{F}_\infty^o)$, pour presque tout t , il existe un ensemble N_t de ν mesure nulle tel que X_t soit continue en tout point $\omega \notin N_t$.

Théorème A3 : Pour qu'une famille $(\nu_i, i \in I)$ de mesures positives bornées sur $(\Omega_d, \mathcal{F}_\infty^o)$ soit relativement étroitement compacte (Ω_d étant muni de la topologie (σ)) , il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, tout entier p , et tout η positif, il existe :

a) $a_p > 0$ tel que $\sup\limits_I \nu_i\{\sup\limits_{t<p} |X_t| > a_p\} \leqq \varepsilon$

b) $b_\eta > 0$ tel que $\sup\limits_I \nu_i\{\sup\limits_{s,t<b_\eta} |X_t - X_s| > \eta\} \leqq \varepsilon$

c) $c_{p,\eta} < p$ tel que $\sup\limits_I \nu_i\{\sup\limits_{c_{p,\eta} \leqq s<t<p} |X_t - X_s| > \eta\} \leqq \varepsilon$

d) $d_{p,\eta} > 0$ tel que

$$\sup_I \nu_i\Big(\sup_{\substack{t_1<t_2<p \\ |t_1-t_2| \leqq d_{p,\eta}}} \ \sup_{t_1<t<t_2} \min\{|X_t-X_{t_1}|, |X_t-X_{t_2}|\} > \eta \Big) \leqq \varepsilon$$

e) $\sup\limits_I \nu_i(\Omega_d) < \infty$.

REFERENCES

(1) CHOU CHING-SUNG et P.A. MEYER : Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Séminaire de Probabilités IX - Springer.

(2) C. DELLACHERIE : Une représentation intégrale des surmartingales à temps discret. Publication I.S.U.P. Vol.2 (1-18)(1968).

(3) L. DUBINS et G. SCHWARZ : On extremal martingale distributions. Fifth Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability, 1967, Vol. II, part I, p. 295-299.

(4) J. JACOD et J. MEMIN : Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. (A paraître).

(5) J. JACOD : Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. f. W. 31 (1975) 235-246.

(6) J. P. LEPELTIER et B. MARCHAL : Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel. (A paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré).

(7) P.A. MEYER : Probabilités et Potentiels. Hermann (1966).

(8) K. PARTHASARATHY : Probability measures on metric spaces. Academic Press (1967).

(9) K.A. YEN et CH. YOEURP : Représentation des martingales comme intégrales stochastiques des processus optionnels. Séminaire de Probabilités X . Springer.

(10) Ch. YOEURP : Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X . Springer.

(11) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X . Springer.

(12) E. LENGLART : Communication personnelle.

Laboratoire de Calcul des Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05