FORMULE DE CAUCHY RELATIVE A CERTAINS LACETS BROWNIENS.

INTRODUCTION

Le théorème de P. Lévy établissant l'invariance conforme du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{C}$ ([7], page 254) suscite de nombreuses recherches (par exemple, [3], [4], [5] et cette liste est loin d'être exhaustive !) liant fonctions holomorphes et mouvement brownien.

Nous nous sommes posé, à ce sujet, la question suivante : la formule de Cauchy constituant l'un des points cruciaux de la théorie des fonctions holomorphes, peut-on obtenir une formule analogue, relative au mouvement brownien plan, ou à des processus <<voisins>> ?.

Une seconde question, très voisine de la première, est à l'origine de ce travail : si $(Z_t, t \geq 0)$ est une martingale continue, à valeurs dans U, ouvert du plan complexe, et $\varpi = Pdx + Qdy$ une forme différentielle fermée définie sur U, l'intégrale $\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \varpi$ de ϖ sur les trajectoires de Z coïncide-t-elle avec l'intégrale stochastique de Ito $\int_o^t [P(X_s,Y_s)dX_s + Q(X_s,Y_s)dY_s]$ (notée dans tout ce travail, pour abréger $\int_o^t \varpi(dX_s,dY_s)$)? .

En général, les deux intégrales ne sont pas égales, et l'on est amené à définir, au premier chapitre, les intégrales stochastiques :

(1) $$R.\int_o^t \varpi(dX_s,dY_s) \triangleq \underset{(n\to\infty)}{P.\lim} \sum_{i\in\tau_n} \int_{[Z_{t_i},Z_{t_{i+1}}]} \varpi$$

où P.lim désigne la limite en probabilité, et $(\tau_n\ , n\in\mathbb{N})$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$, de plus en plus fines, et dont le pas $\emptyset(\tau_n)$ décroit vers 0. On donne ensuite une formule générale liant $R.\int_o^t \varpi(dX_s,dY_s)$ et $\int_o^t \varpi(dX_s,dY_s)$ (voir les formules (8) et (9) ci-dessous).

La formule

(2) $$R.\int_o^t \varpi(dX_s,dY_s) = \int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \varpi \quad \text{ps}$$ permet alors de répondre à la seconde question posée précédemment. Un cas particulier fondamental est celui où la martingale $Z = X+iY$ est conforme (définition düe à R. Getoor et M. Sharpe - voir [5]), à valeurs dans U. Alors, si $\varpi = f(z)dz$, avec f fonction holomorphe dans U, on a :

(3) $$\int_o^t f(Z_s)dZ_s = \int_{Z_{(o,t)}(\omega)} f(z)dz \quad \text{ps.}$$

En appliquant cette formule à $f(z) = {}^1/_z$ lorsque $P(Z_o = 0) = 0$, on obtient l'égalité :

(4) $$\theta(t) - \theta(s) = \int_o^t \frac{X_u dY_u - Y_u dX_u}{X_u^2 + Y_u^2} \qquad (0 \leq s \leq t)$$

explicitant la variation entre s et t d'une détermination continue $(\theta(u), u \geq 0)$ de l'angle polaire de la martingale conforme Z. Cette identité nous permet de retrouver la loi de $\theta(t) - \theta(0)$, pour $t > 0$ fixé, lorsque Z est le mouvement brownien complexe (voir, à ce sujet, l'article de F. Spitzer [11] ou le livre de Ito-Mac Kean [6], page 271).

Les résultats décrits ci-dessus nous entraînent à étudier au second chapitre l'indice d'un point a du plan par rapport aux lacets constitués par la trajectoire $Z_\gamma(\omega)$ du processus de Wiener complexe à deux paramètres, γ étant lui-même un <<bon>> lacet de $\mathbb{R}_+^2$, et à formuler le théorème des résidus (et donc la formule de Cauchy) relatifs à de tels lacets en termes d'intégrales stochastiques.

Cette étude est reprise au troisième chapitre, en remplaçant le point (déterministe) a par la variable aléatoire Z_a $(a \in \mathbb{R}_+^2)$.

0 - QUELQUES NOTATIONS

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une suite finie de points de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\emptyset(X) = \sup_i |x_{i+1} - x_i|$.

- Dans tout le travail, $\tau_n = (0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t)$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$, de plus en plus fines, et dont le pas $\emptyset(\tau_n)$ décroit vers 0. Unetelle suite $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ sera appelée suite de subdivisions standard de $[0,t]$.
- $\mathcal{H}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, ouvert de $\mathbb{C}$.
- Si V est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, $C^1(V)$ (resp. $C_b^1(V)$) désigne l'ensemble des fonctions continûment différentiables (resp. continûment différentiables et bornées, ainsi que leurs dérivées premières).

- On appelle chemin toute application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$; γ^* désigne le graphe de γ.

- Les chiffres romains I, II, III désignant les chapitres ne sont pas rappelés à l'intérieur de ces chapitres. Ainsi, la référence : lemme I.2.2., par exemple, désigne le lemme 2.2. du chapitre I.

I.- INTEGRALES STOCHASTIQUES ET INTEGRALES DE FORMES DIFFERENTIELLES FERMEES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{C}$.

1.- Rappel :

On rappelle très succintement la définition de $I_\gamma(\varpi) = \int_\gamma \varpi$ pour $\varpi \overset{\Delta}{=} Pdx + Qdy \overset{\Delta}{=} f(z)dz + g(z)d\bar{z}$, forme différentielle de degré 1, définie sur U, ouvert de $\mathbb{C}$, et fermée (ie : ses coefficients - complexes - sont continus, et elle admet localement une primitive) et $\gamma : [0,1] \to U$ chemin (pour référence, voir/par exemple (2), page 58) :

Si $\beta = \bigcup_{i=1}^{n} B(\gamma(t_i),r_i)$ est une chaîne formée de boules recouvrant γ^* et contenues dans U, avec $\tau_n = (0 = t_o < \cdots < t_n = 1)$ subdivision de $[0,1]$, on définit F primitive continue de ϖ le long de β et on note $I_\gamma(\varpi) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$. $I_\gamma(\varpi)$ ne dépend alors que de γ^* et ϖ. De plus, l'intégrale I possède les propriétés remarquables suivantes :

i). Si γ est de classe C^1 par morceaux, $I_\gamma(\varpi)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_\gamma \varpi(dx,dy)$ (d'où la notation, dans tous les cas, $I_\gamma(\varpi) = \int_\gamma \varpi$).

ii). Si γ et γ' sont deux chaînes U.homotopes à extrémités fixes, alors :

$$\int_\gamma \varpi = \int_{\gamma'} \varpi$$

iii). Si $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ désigne une suite de chemins tels que $\gamma_n^* \subset \gamma^*$, avec $\gamma_n(0) \to \gamma(0)$ et $\gamma_n(1) \to \gamma(1)$, alors : $\int_{\gamma_n} \varpi \to \int_\gamma \varpi$.

La proposition suivante découle aisément de ii), et de l'uniforme continuité de γ :

Proposition 1.1. :

Soit $\tau_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \text{——} < t_{p_n}^n = 1\}$ une suite de subdivisions standard de $[0,1]$. On note γ_n la ligne polygonale obtenue en joignant les points de $\gamma_{\tau_n} = \{\gamma(t_0^n) , \gamma, \ldots, \gamma(t_1^n)\}$

Il existe alors $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq \mathbb{N}$, on ait :

$$\gamma_n^* \subset U \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_n} \varpi = \int_\gamma \varpi .$$

2.- Différentes définitions d'intégrales stochastiques.

2.1. - Dans toute la suite, on suppose donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration croissante $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ vérifiant les conditions habituelles : $\mathcal{F}_0$ est $(\mathcal{F}, P)$ complète, et la famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est continue à droite. $\mathcal{M}_c$ désigne l'ensemble des $(\mathcal{F}_t, P)$ martingales continues de carré intégrable (ie : $\forall t$, $E(M_t^2) < \infty$), $\mathcal{L}_c$ l'ensemble des $(\mathcal{F}_t, P)$ martingales locales continues. Les éléments de $\mathcal{M}_c$ et $\mathcal{L}_c$ sont à valeurs réelles ou complexes.

Si $X \in \mathcal{L}_c$ est à valeurs réelles, on note $< X,X >$ l'unique (1) processus croissant prévisible (en fait, continu) tel que $X^2 - < X,X >$ appartienne à $\mathcal{L}_c$. Ainsi, si X et Y sont les parties réelle et imaginaire de $Z \in \mathcal{L}_c$, le processus défini par :

$$< Z,Z > = < X,X > - < Y,Y > + 2i < X,Y > \tag{5}$$

est l'unique processus prévisible à variation bornée tel que $Z^2 - < Z,Z > \in \mathcal{L}_c$.

(1) Tous les processus croissants, et plus généralement, les processus à variation bornée, sont ici supposés nuls en 0.

(Signalons que ce processus est noté $\langle Z,\overline{Z}\rangle$ par R. Getoor et M. Sharpe en [5] mais notre notation nous semble plus naturelle (2). De toute façon, cette différence ne prête pas à confusion). Si $Z,Z' \in \mathcal{L}_c$, on définit $\langle Z,Z'\rangle$ par polarisation, faisant de $(Z,Z') \to \langle Z,Z'\rangle$ une application $\mathbb{C}$ bilinéaire définie sur $\mathcal{L}_c \times \mathcal{L}_c$.

2.2.- La variante suivante d'un lemme assez classique (voir, par exemple [9]) nous sera très utili par la suite :

Lemme 2.2. : Soient

. $0 < \lambda \leq 1$ et $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de subdivisions standard de $[0,t]$ $(t > 0)$ que l'on pointe par $t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$.

. $M \in \mathcal{M}_c$, uniformément bornée, à valeurs réelles et $A = \langle M,M\rangle$ $(f(u,\omega), u \geq 0)$ un processus $\mathcal{F}_u$ adapté, continu, uniformément borné. Alors

1). La suite $\sum_{\tau_n} f(t_i,\omega) (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})^2 - \sum_{\tau_n} f(t_i,\omega)(A_{t_i^\lambda} - A_{t_i})$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers 0.

2). Si $\lambda = 1$, ou si A - en tant que mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ - est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue (1) et $0 < \lambda < 1$, on a

$$\sum_{\tau_n} f(t_i,)(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})^2 \xrightarrow[L^2(\Omega,\mathcal{F},P)]{(n \to \infty)} \lambda \int_0^t f(s)dA_s .$$

Preuve (succinte) - Remarquons tout d'abord que M étant uniformément bornée, A est puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable pour tout $p \in \mathbb{N}$ (d'après les inégalités de Burkholder par exemple).

---

(2) Voir par exemple la formule (9).

(1) On notera dans la suite $A \ll \mu$.

1°. La partie 1) du lemme est bien connue pour $\lambda = 1$. Une légère modification des arguments utilisés dans ce cas entraîne 1) pour $0 < \lambda \leq 1$.

2). Si $\lambda = 1$, 2) est immédiat, f étant un processus continu.

Si $0 < \lambda < 1$, et $A \ll \mu$, on déduit 2) des remarques suivantes :

. Si a est une fonction continue sur $[0,t]$,

$$\left|\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s)\, ds - \sum_{\tau_n} a(t_i)\lambda(t_{i+1} - t_i)\right| \leq \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} |a(s)-a(t_i)|ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

et donc

$$\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s)\, ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \lambda\int_0^t a(s)\, ds \; .$$

. Les fonctions continues étant denses dans $L^1([0,t],\mu)$, le même résultat est vrai pour $a \in L^1([0,t],\mu)$.

<u>2.3.</u> - On déduit du lemme précédent la :

<u>Proposition 2.3.</u> : Soient . $f \in C_b^1(\mathbb{R})$

. $(\tau_n\, ,\, n \in \mathbb{N})$ une suite de subdivisions standard de $[0,t]$ pointée par $t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$ $(t_i \in \tau_n, 0 < \lambda \leq 1)$.

. $M,N \in \mathcal{M}_c$, uniformément bornées, à valeurs réelles et $A = \langle M,N \rangle$.

1). On note $M^{(n)}$ le processus défini sur $[0,t] \times \Omega$ par :

$$M_u^{(n)}(\omega) = M_{t_i}(\omega) + \frac{u-t_i}{t_{i+1}-t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(\omega) \quad (t_i \leq u \leq t_{i+1}, t_i \in \tau_n)$$

La suite des intégrales de Riemann $\int_0^t f(M_u^{(n)})dN_u^{(n)}$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers

$$(6) \qquad R.\int_0^t f(M_s)dN_s = \int_0^t f(M_s)\,dN_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(M_s)\,dA_s \ .$$

2). Si $\lambda = 1$, ou si $A \ll \mu$ et $0 < \lambda < 1$, la suite de variables

$(f.N)_{\tau_n^\lambda}(t) = \sum_{\tau_n} f(M_{t_i^\lambda})\,(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers (1)

$$(7) \qquad S_\lambda.\int_0^t f(M_s)\,dN_s = \int_0^t f(M_s)\,dN_s + \lambda\int_0^t f'(M_s)\,dA_s \ .$$

Remarque - Cette proposition et la suivante étendent aux martingales locales continues des résultats connus lorsque $M = N = B$ mouvement brownien réel. En effet, dans ce cas, le résultat 1) de la proposition découle en particulier de ceux de l'article [12] de E. Wong et M. Zakaï, et les intégrales $S_\lambda.\int_0^t f(B_s)\,dB_s)$ sont les "intégrales de Stratonovitch d'ordre λ ", ce qui justifie notre notation.

---

(1) On notera $S = S_1$ dans la suite.

Démonstration de la proposition :

1). Posons $M_i^s(\omega) = M_{t_i}(\omega) + s(M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega))$.

On a alors :

$$\int_0^t f(M_u^{(n)})dN_u^{(n)} = \sum_{\tau_n} \int_0^1 f(M_{t_i} + s(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}))ds(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

$$= \sum_{\tau_n} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds\, s\int_0^1 dv\, f'(M_{t_i} + v\, M_i^s)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\,(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

La première somme converge dans L^2 vers l'intégrale de Ito $\int_0^t f(M_s)dN_s$. La seconde peut être décomposée en :

$$\frac{1}{2} \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds\, s \int_0^1 dv\big(f'(M_{t_i} + v\, M_i^s) - f'(M_{t_i})\big)\,(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \ .$$

D'après le lemme, la première somme converge vers $\frac{1}{2}\int_0^1 f'(M_s)\, dA_s$ et la seconde vers 0 (grâce à la continuité de f') dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

2. Décomposons $(f.N)_{\tau_n^\lambda}(t)$ en :

$$(f.N)_{\tau_n^\lambda}(t) = \sum_{\tau_n} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 f'(M_{t_i} + s(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i}))\, ds(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

$$= \sum_{\tau_t} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_i^\lambda} - N_{t_i}) +$$

$$+ \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i^\lambda})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds\{f'(M_{t_i} + s(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})) - f'(M_{t_i})\} (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) .$$

La première somme converge lorsque $(n \to \infty)$ vers $\int_0^t f(M_s) dN_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la seconde converge, d'après le lemme, vers $\lambda \int_0^t f'(M_s) dA_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La troisième somme converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers 0 : en effet, on a $E\{\sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i^\lambda})\}^2$ $= E\{\sum_{\tau_n} (f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i}))^2 (A'_{t_{i+1}} - A'_{t_i^\lambda})\}$, où $A' = \langle N,N \rangle$, et la continuité de M entraîne le résultat. Enfin, la continuité de f' entraîne la convergence de la dernière somme vers 0 dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2.4. - Les résultats précédents s'étendent bien par "localisation".

Proposition 2.4. : L'énoncé de la proposition I.2.3. est toujours valable lorsque : $M,N \in \mathcal{L}_c$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, à condition de remplacer "convergence dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ " par "convergence en probabilité".

Preuve : Définissons a priori R (resp. S_λ) $\int_0^t f(M_s)\, dN_s$ à l'aide des formules (6) (resp. (7)) . Soit $T_n = \text{Inf}\,(t \,;\, |M_t| \vee |N_t| \geq n)$ et $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions de $C_b^1(\mathbb{R})$, telles que $f_n \equiv f$ sur $[-n-1, n+1]$, pour tout n .

On a alors, (en écrivant les inégalités pour S par exemple) pour tout $\alpha > 0$:

$$P\left(\left|S.\int_0^t f(M_s)dN_s - (f.N)_{\tau_n}(t)\right| \geq \alpha\right) \leq P(T_p \leq t)$$

$$+ P\left(\left|S.\int_0^t f_p(M_s)dN_s - (f_p.N)_{\tau_n}(t)\right| \geq \alpha ; T_p > t\right) .$$

Or, $T_p \uparrow \infty$ p.s. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe donc p_o tel que $P(T_{p_o} \leq t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On majore alors la seconde expression (pour $p = p_o$) par :

$$\frac{1}{\alpha}\left(E\left(\left(S.\int_0^t f_{p_o}(M_s)dN_s - (f_{p_o}.N)_{\tau_n}(t)\right)^2\right)\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

et la proposition est démontrée.

2.5. - Nous n'avons énoncé les résultats précédents que pour les martingales (locales) réelles continues. Le passage aux martingales à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est immédiat, et on a donc le :

Théorème 2.5. :

Soit $Z = X+iY \in \mathcal{L}_c$, telle que $\Gamma = \mathbb{C} \setminus U$ soit un fermé de $\mathbb{C}$, polaire pour Z, ie : $P(\exists t \geq 0 , Z_t \in \Gamma) = 0$.

Soit $\varpi = Pdx + Qdy = f\,dz + g\,d\bar{z}$ une forme différentielle fermée, de classe C^1, définie sur U. Alors, on a l'égalité :

(8) $$\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \varpi = R.\int_0^t \varpi(dX_s,dY_s) \text{ ps} ,$$ où le membre de droite est défini par :

(9) $$R.\int_0^t \varpi(dX_s,dY_s) \overset{\Delta}{=} \int_0^t \varpi(dX_s,dY_s) + \frac{1}{2} J_t(\varpi,Z)$$

avec

$$\int_0^t \overline{\omega}(dX_s,dY_s) = \int_0^t \{P(X_s,Y_s)dX_s+Q(X_s,Y_s)dY_s\} = \int_0^t \{f(Z_s)dZ_s + g(Z_s)d\overline{Z}_s\}$$

et

$$J_t(\overline{\omega},X) = \int_0^t \{\frac{\partial P}{\partial x}(X_s,Y_s)d<X,X>_s + (\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x})(X_s,Y_s)d<X,Y>_s + \frac{\partial Q}{\partial y}(X_s,Y_s)d<Y,Y>_s\}.$$

$$= \int_0^t \{\frac{\partial f}{\partial z}(Z_s)d<Z,Z>_s + (\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial z})(Z_s)d<Z,\overline{Z}>_s + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(Z_s)\ d<\overline{Z},\overline{Z}>_s\}.$$

De plus, les deux membres de (8) sont indistinguables.

Remarque - Le membre de gauche de (8) n'étant défini que pour $\overline{\omega}$ forme différentielle fermée, on a en fait : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$. Cependant, la définition de $R.\int_0^t \overline{\omega}(dX_s,dY_s)$ étant valable pour toute forme différentielle de classe C^1, nous préférons donner l'expression générale de $J_t(\overline{\omega},X)$.

Démonstration du théorème : D'après la proposition I.2.4., $R.\int_0^t \overline{\omega}(dX_s,dY_s)$ est la limite en probabilité de la suite $\sum_{\tau_n} \int_{[Z_{t_i},Z_{t_{i+1}}]} \overline{\omega}$, $\{\tau_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ étant une suite de subdivisions standard de $[0,t]$. C'est donc la limite p.s. d'une sous-suite de ces intégrales de Riemann et la proposition I.1.1. permet alors de conclure.

3.- Le cas particulier des martingales conformes.

3.1.- Le théorème I.2.5. prend une forme très simple et intéressante pour une classe particulière de martingales (locales) complexes : les martingales conformes, dont nous rappelons la

Définition 3.1. ([5]) :

$Z \in \mathcal{L}_c$ est dite martingale (locale) conforme si $<Z,Z> = 0$, ou, de façon équivalente, $Z^2 \in \mathcal{L}_c$ (d'après la définition de $<Z,Z>$ en I.2.1.). L'ensemble des martingales conformes est noté $\mathcal{C}$ par la suite.

Les martingales conformes ont de nombreuses propriétés intéressantes : en particulier, le théorème de P. Lévy mentionné dans l'introduction s'étend naturellement aux éléments de $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

Théorème 3.1. :

Soit $Z \in \mathcal{C}$; alors, pour toute fonction f holomorphe (ou anti-holomorphe) sur $\mathbb{C}$, on a : $f \circ Z \in \mathcal{C}$.

Preuve - D'après la formule de Ito, on a :

$$f(Z_t) = f(Z_o) + \int_o^t \frac{\partial f}{\partial z}(Z_s)dZ_s \quad \text{si } f \text{ est holomorphe}$$

$$= f(Z_o) + \int_o^t \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_s)d\bar{Z}_s \quad \text{si } f \text{ est anti-holomorphe.}$$

Or, si $Z \in \mathcal{C}$, on a aussi : $\bar{Z} \in \mathcal{C}$; de plus, $\mathcal{C}$ est stable par intégration stochastique. En effet, si $Z \in \mathcal{L}_c$ et H est un processus bien mesurable tel que

$$\int_o^t |H_s|^2 (d<X,X>_s + d<Y,Y>_s) < \infty \text{,ps, alors :}$$

$$< \int_o^{\cdot} H_s\, dZ_s, \int_o^{\cdot} H_s\, dZ_s >_t = \int_o^t H_s^2\, d<Z,Z>_s \text{ , d'où le résultat.}$$

3.2.- Voici une version du théorème I.2.5 appliqué à $Z \in \mathcal{C}$.

Théorème 3.2. :

Soit $Z \in \mathcal{C}$, telle que $\Gamma = \mathbb{C} \setminus U$ soit un fermé de $\mathbb{C}$ polaire pour Z. Alors, si $f \in \mathcal{H}(U)$, on a :

$$\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} f(z)dz = \int_o^t f(Z_s)dZ_s) = R.\int_o^t f(Z_s)dZ_s = S.\int_o^t f(Z_s)dZ_s \quad \text{ps.} \tag{10}$$

$$= S_\lambda.\int_o^t f(Z_s)dZ_s \quad \text{si} \quad 0 < \lambda < 1 \text{ et } A = \langle X,X\rangle = \langle Y,Y\rangle \ll \mu).$$

Preuve - $\varpi = f(z)dz$ est une forme différentielle fermée de classe C^∞ sur U. ∎

En particulier, on a le :

Corollaire 3.2. :

Soit $Z \in \mathcal{C}$, telle que $P(Z_o = 0) = 0$. $\{0\}$ est alors polaire pour Z et on peut donc définir presque sûrement $(\theta(t),\ t \geq 0)$ détermination continue de l'angle polaire de $Z_\cdot(\omega)$. Alors :

$$\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \int_o^t \frac{dZ_s}{Z_s} \quad \text{et} \quad \theta_t - \theta_o = \int_o^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2} \quad \text{ps.} \tag{11}$$

Preuve - Les conditions : $Z \in \mathcal{C}$ et $P(Z_o = 0) = 0$ entraînent que $\{0\}$ est polaire pour Z, car Z est un mouvement brownien complexe, au changement de temps inverse de $A = \langle X,X\rangle = \langle Y,Y\rangle$ près (voir [5]) et la propriété est bien connue pour le mouvement brownien complexe.

La première formule de (11) découle donc du théorème I.3.2. ; de plus, par définition de $\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \frac{dz}{z}$, on a :

$$\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}_\omega(Z_t(\omega)) - \mathrm{Log}_\omega(Z_o(\omega)),\ \mathrm{Log}_\omega(z)$$

étant une primitive de $\frac{1}{z}$ le long de la trajectoire $Z_.(\omega)$ (voir I.1).
D'où

$$\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}\left|\frac{Z_t(\omega)}{Z_o(\omega)}\right| + i(\theta_t(\omega) - \theta_o(\omega)),\ \text{et donc :}$$

$$\theta_t(\omega) - \theta_o(\omega) = \mathrm{Im}\int_o^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \int_o^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)}\ \text{p.s.}$$

<u>Remarque</u> - En [5], R. Getoor et M. Sharpe utilisent la formule de Ito pour obtenir la première partie de (11). En effet, d'après cette formule, on a, en posant $W_t = \int_o^t \frac{dZ_s}{Z_s}$, $\frac{1}{Z_t}\exp W_t = {}^1/_{Z_o}$, d'où $\exp(W_t) = {}^{Z_t}/_{Z_o}$,

ce qui entraîne $W_t(\omega) = \mathrm{Log}_\omega(Z_t(\omega)) - \mathrm{Log}_\omega(Z_o(\omega))$ ps, avec les notations précédentes.

4.- <u>Loi de l'angle polaire</u> $(\theta_t - \theta_o)$ <u>du mouvement brownien complexe</u> <u>$(Z_u, u \geq 0)$.</u>

Ce paragraphe donne une application de la formule (11) et est indépendant de la suite de l'article.

Cette formule nous permet en effet de retrouver la loi de la variable $(\theta_t - \theta_o)$, $(\theta_u,\ u \geq 0)$ désignant une détermination continue de l'angle polaire du mouvement brownien complexe $Z = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Z_t, P_z, z \neq 0)$ ne partant pas de 0. Tout d'abord, remarquons que :

- le processus $\Gamma(u) = ((\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)) ; u \geq 0)$ défini par

$$\Gamma_1(u) = \int_0^u \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^{1/2}} \; ; \quad \Gamma_2(u) = \int_0^u \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^{1/2}}$$ est un mouvement

brownien à deux dimensions, avec $\Gamma(0) = (0,0)$.

- Si l'on note $R(u) = |Z_u|$, le processus $(R(u), \theta(u) \; ; u \geq 0)$ est solution du système d'équations stochastiques :

$$(e) \begin{cases} (e.1) & R(t) = R(0) + \Gamma_1(t) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{R(s)}\, ds \\ (e.2) & \theta(t) = \theta(0) + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{R(s)}\, d\Gamma_2(s) \end{cases}$$

En étudiant (e), on obtient la :

<u>Proposition 4.1.</u> :

1) $(R(t), t \geq 0)$ est l'unique solution positive de (e.1) pour $R(0) > 0$ fixé, et pour tout $t > 0$, $\mathcal{F}_t^R = \sigma\{R(s), s \leq t\} \vee \mathcal{N} \subsetneq \mathcal{F}_t^{\Gamma_1} = \sigma\{\Gamma_1(s), s \leq t\} \vee \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ désigne la classe des ensembles $(\mathcal{F}, P)$ négligeables.

2). La fonction caractéristique de $(\theta_t - \theta_o)$ vérifie la formule :

(12) $$E_z \left[e^{i\alpha(\theta_t - \theta_o)} \right] = E_z \left[e^{-\alpha^2/2 \int_c^t \frac{1}{R^2(s)} ds} \right]$$

Preuve -

1). Soient R_1 et R_2 deux solutions positives de (e.1), avec $R_1(0) = R_2(0)$. Alors, $D = R_1 - R_2$ est un processus dérivable, et

$D'(t) = -\frac{1}{2} \frac{D(t)}{(R_1R_2)(t)}$. D'où : $[D^2]'(t) \leq 0$; or, $D^2(0) = 0 \Longrightarrow D \equiv 0$

(cette démonstration, valable pour les processus de Bessel en toute dimension, figure dans McKean [8], page 80). Soit maintenant une suite $\phi_n \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $\phi_n(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \geq \frac{1}{n}$. On note R_n l'unique solution de l'équation $R_n(t) = R_n(0) + \Gamma_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t ds\ \phi_n(R_n(s))$. La régularité de ϕ_n entraîne que R_n est un processus adapté aux tribus $\mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$. Soit $T_n = \mathrm{Inf}(t > 0) | R_n(t) \leq \frac{1}{n})$. On sait que, pour tout n, $T_n < \infty$ p.s. D'autre part, par unicité, on a : $R_n(s \wedge T_n) = R(s \wedge T_n)$, dont on déduit $T_n = \mathrm{Inf}\ (t | R_n(t)) \leq \frac{1}{n})$; T_n est ainsi un temps d'arrêt des tribus $\mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$, et pour $u \leq t$, on a : $\forall n$, $R(u \wedge T_n) \in \mathcal{F}_{t \wedge T_n}^{\Gamma_1} \subseteq \mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$, d'où le résultat, en faisant tendre n vers $+\infty$.

2). Le résultat cherché ne dépend que de la loi du mouvement brownien complexe. On peut donc supposer $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, et il existe P_z^ω version régulière de l'espérance conditionnelle de P_z par rapport à la tribu $\sigma\{\Gamma_1(u), u \in \mathbb{R}_+\}$. On a alors, d'après (e.2), et le résultat 1) :

$$E_z^\omega\left(e^{i\alpha(\theta_t-\theta_o)}\right) = E_z^\omega\left(e^{i\alpha\int_o^t \frac{1}{R(s)(\omega)}\, d\Gamma_2(s)}\right) \text{ ps},$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_o^t \frac{1}{R^2(s)(\omega)}\, ds} \quad \text{ps}.$$

d'où la formule (12), obtenue en prenant l'espérance des deux membres dans l'égalité précédente. C'est ensuite à partir de la formule (12) que Ito-McKean ([6], page 271) déduisent la loi de $(\theta_t-\theta_o)$, par inversion de la transformation de Fourier.

5.- Remarques générales

5.1.- Sous les hypothèses du théorème I.2.5., posons :

$$\oint_{(o,t)} f(Z_u)dZ_u = \int_o^t f(Z_u)dZ_u - S.\int_o^t f(Z_u)dZ_u.$$

Si l'on suppose de plus $Z \in \mathcal{C}$, on a d'après le théorème I.3.2, $\oint_{(o,t)} f(Z_u)dZ_u = 0$. En particulier, si $P(Z_o = a) = 0$, et $Z \in \mathcal{C}$, $\{a\}$ est polaire pour Z, et donc : $\oint_{(o,t)} \frac{d\,Z_u}{Z_u-a} = 0$. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des éléments de $\mathcal{C}$, comme le montre la :

Proposition 5.1. :

Soit $Z \in \mathcal{L}_c$, pour laquelle $\{a\}$ est polaire. Alors,

$$\oint_{(o,t)} \frac{dZ_u}{(Z_u-a)} \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \oint_{(o,t)} \frac{dZ_u}{Z_u-a} = 0 \iff Z \in \mathcal{C}.$$

Preuve - La première équivalence provient de la continuité de $t \longrightarrow \oint_{(o,t)} \frac{dZ_u}{Z_u-a}$, et la seconde de $\oint_{(o,t)} \frac{dZ_u}{(Z_u-a)} = \int_o^t \frac{d\langle Z,Z\rangle_u}{(Z_u-a)^2}$.

Ainsi, on ne peut poursuivre plus loin - si l'on se limite à ce cadre - - une étude - qui ne soit pas triviale - d'une formule de Cauchy stochastique. Ceci est bien sûr lié au fait que les seuls lacets que l'on puisse raisonnablement associer à $Z \in \mathcal{C}$ sont $Z_{(o,t)}(\omega) - Z_{(o,t)}(\omega)$ (voir cependant la remarque II.3.2).

C'est pourquoi, dans la même optique, nous avons été amené à considérer le mouvement brownien à deux paramètres (voir II.1). Alors si $\omega \in \Omega$, et γ est une courbe fermée de $\mathbb{C}$ telle que $a \notin Z_\gamma(\omega)$, il n'est pas trivial de décider si $Z_\gamma(\omega)$ est $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ homotope à 0 ou non.

5.2.- Revenons maintenant aux hypothèses et notations du théorème I.2.5 sans supposer ϖ fermée. Disons que ϖ est (stochastiquement) fermée pour Z si : R. $\int_0^t \varpi(dX_s,dY_s) \in \mathcal{L}_c$. D'après les formules (8) et (9), on a évidemment : ϖ est fermée pour $Z \iff \int_0^t \varpi(dX_s,dY_s) = (R\circ S).\int_0^t \bar{\varpi}(dX_s,dY_s)$.

ϖ est donc fermée pour Z si les différentes définitions de l'intégrale stochastique de ϖ par rapport à Z coïncident.

Exemples :

1). $S(t) = \int_0^t (X_s dY_s - Y_s dX_s)$ - appelée par P. Lévy l'aire stochastique de Z entre 0 et t - est définie à l'aide de $\varpi = x\,dy - y\,dx$, forme fermée pour Z, mais non fermée.

2). Soit Z le mouvement brownien complexe tué à T_U, temps de sortie de $U \ni 0$, U ouvert de $\mathbb{C}$, et $\varpi = P\,dx + Q\,dy$ forme différentielle de classe C^1 sur U. Les propriétés des trajectoires du mouvement brownien entraînent l'équivalence suivante :

$$(\forall K \text{ compact de } U,\ \varpi \text{ est fermée pour } Z_{\cdot \wedge T_K}) \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$$

II - INDICE D'UN POINT ET THEOREME DES RESIDUS RELATIFS A CERTAINS LACETS BROWNIENS.

A la suite de I.5., nous allons appliquer les résultats du chapitre I à certains lacets $Z_\gamma(\omega)$ du processus de Wiener complexe à 2 paramètres. Voici tout d'abord un :

1.- Rappel sur le processus de Wiener à deux paramètres. ([1] et ([10])

On note encore μ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$; soit $\mathcal{E}_\mu$ la classe des boréliens μ intégrables. On appelle mesure brownienne (centrée, réelle) sur $L^2(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)\mu)$ tout processus gaussien centré réel $\underline{B} = (\Omega, \mathcal{A}, P, B(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{E}\mu)$ de covariance μ ie :

$E[B(\Gamma)\, B(\Gamma')] = \mu(\Gamma \cap \Gamma')$. Le noyau $(f,g) \to \int fg\, d\mu$ défini sur $(L^2(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2), \mu))^2$ est symétrique, de type positif, ce qui assure l'existence de $\underline{B}$. D'après [10], il existe une réalisation de $\underline{B}$ telle que le processus $B_t = B(]0,t_1] \times]0,t_2])$ $(t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0)$ soit p.s. à trajectoires continues : on appelle $(B_t,\ t \in \mathbb{R}_+^2)$ processus de Wiener (réel) à deux paramètres.

- Dans toute la suite, on s'intéresse principalement au processus $(Z_t = X_t + iY_t,\ t \in \mathbb{R}_+^2)$ où X et Y sont deux processus de Wiener réels, à deux paramètres, et indépendants. En particulier, pour tout $s_o > 0$, $(Z_{s_o,v},\ v \geq 0)$ est un mouvement brownien complexe, de covariance $s_o.v$. De même, pour tout $v_o > 0$, $(Z_{s,v_o},\ s \geq 0)$ est un mouvement brownien complexe, de covariance $s.v_o$.

- De façon générale, pour toutes les questions concernant les processus à deux paramètres, on se réfère à [1] , dont on adopte en particulier les notations suivantes :

Pour $z = (x,y)$, $z' = (x',y')$ points de $\mathbb{R}_+^2$, on note $(z \leq z')$ lorsque $\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$ et $z \wedge z'$ si $(x < x')$ et $(y > y')$.

Si $a \leq b$, on note $(a,b] = \{z \mid x_a < x \leq y_b \ ; \ y_a < y \leq y_b\}$; $R_z = \{u \in \mathbb{R}_+^2 \mid u \leq z\}$. Voici quelques tribus intéressantes pour la suite :

$$\mathcal{F}_z = \sigma\{Z_u, \ u \leq z\} \vee \mathcal{N} ; \ \mathcal{F}_z^1 = \sigma\{Z_{u,v} \ ; \ u \leq x\} \vee \mathcal{N} ;$$

$$\mathcal{F}_z^2 = \sigma\{Z_{u,v} \ ; \ v \leq y\} \vee \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles P-négligeables pour $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{Z_z, \ z \in \mathbb{R}_+^2\}$.

2.- Questions de quasi-invariance et de support.

Les résultats de ce paragraphe seront utilisés en II.3., et sont obtenus de façon indépendante du reste du travail. En effet, les arguments employés découlant principalement de la quasi-invariance des mesures considérées.

Soit, pour fixer les idées, $\mathcal{W}$ espace de Banach séparable et $\mathcal{V}$ sous-espace dense de $\mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$. On dit que $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathcal{W}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})$ est quasi-invariante sans les translations de $\mathcal{V}$ si, notant T_v la translation sur $\mathcal{W}$: $\omega \to \omega - v$ $(v \in \mathcal{V})$, on a : $\forall v \in \mathcal{V}$, $T_v(\nu) \sim \nu$. Remarquons alors, que, si $\mu \neq 0$, supp(μ) contient au moins un point ω_o, donc $\omega_o + \mathcal{V}$ par quasi invariance, donc tout $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ étant dense dans $\mathcal{W}$.

Les mesures considérées ci-dessous sont toutes des mesures de probabilité sur des espaces $E = C(\Gamma; \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ $(\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$ munis de la topologie de la convergence compacte, et de leur tribu borélienne. Les projections habituelles sont notées $(X_u, \ u \in \Gamma)$ $[X_u(\omega) \equiv \omega(u)]$; $\mathcal{Q}$ désigne l'union des axes de coordonnées de $\mathbb{R}_+^2$ et $\underline{X}$ le mouvement brownien réel à deux paramètres. Le résultat suivant est dû à J. Yeh [13] :

Proposition 2.1. :

Soit P la loi de $\underline{X}$ sur $\Omega = \{f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ continue, $f|_{\mathcal{A}} = 0\}$. Soit $\mathcal{J} = \{u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \mid \exists\, \phi \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}),\ u(s,t) = \int_0^s \int_0^t \phi(x,y)dx\,dy\}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in \mathcal{J} \\ \forall z = x+iy \in \mathbb{R}_+^2\end{array}\right., \quad T_u(P)|_{\mathcal{F}_z} \simeq P|_{\mathcal{F}_z} \quad \text{et}$$

$$\frac{d\,T_u(P)}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_z} = \exp\{-X(\phi 1_{R_z}) - \frac{1}{2}\int_{R_z} \phi^2\, d\mu\}$$

On en déduit le :

Théorème 2.2. :

Soit Λ compact de $\mathbb{R}_+^2$; on note $\Omega_\Lambda = \{f : \Lambda \to \mathbb{R}$, continue$\}$ $f|_{\Lambda \cap \mathcal{A}} = 0$ et P_Λ la loi du processus $\underline{X}|_\Lambda$.

P_Λ est quasi-invariante sous les translations de $\mathcal{J}_\Lambda = \{u|_\Lambda ; u \in \mathcal{J}\}$, dense dans Ω_Λ, et a donc pour support Ω_Λ.

Preuve - Soit $z \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $\Lambda \subset R_z$. P_{R_z} étant quasi invariante sous les translations de $\mathcal{J}_{R_z}$ (proposition II.2.1), $P_\Lambda = r_\Lambda^z(P_{R_z})$ est donc quasi-invariante sous les translations de $r_\Lambda^z(\mathcal{J}_{R_z}) = \mathcal{J}_\Lambda$ (on note r_Λ^z l'application $\Omega_{R_z} \to \Omega_\Lambda$)

$$f \to f|_\Lambda$$

- Montrons maintenant que $\mathcal{J}_{R_z}$ est dense dans Ω_{R_z} : si $g \in \Omega_{R_z}$, il existe une suite g_n de fonctions continues sur R_z, avec $g = u.\lim_{(n \to \infty)} g_n$ et $g_n(s,t) = \sum_{i=1}^{k_n} \phi_i^{(n)}(s)\, \psi_i^{(n)}(t)$, avec $\phi_i^{(n)} \in C([0,x],\mathbb{R})$, $\psi_i^{(n)} \in C([0,y],\mathbb{R})$. Quitte à remplacer $\phi_i^{(n)}$ (resp. $\psi_i^{(n)}$) par $\phi_i^{(n)} - \phi_i^{(n)}(0)$ (resp. $\psi_i^{(n)} - \psi_i^{(n)}(0)$), on peut supposer $\phi_i^{(n)}(0) = \psi_i^{(n)}(0) = 0$, et il reste ensuite à approcher $\phi_i^{(n)}$ (resp. $\psi_i^{(n)}$) par des fonctions de classe C^1 nulles en 0.

- $\mathcal{J}_\Lambda$ est dense dans Ω_Λ : en effet, soit $g_\Lambda \in \Omega_\Lambda$. Considérons $\tilde{g}_\Lambda$ prolongeant g_Λ sur $\Lambda \cup \{\mathcal{A} \cap R_z\}$ par 0 sur $\mathcal{A} \cap R_z$. Par définition de Ω_Λ, $\tilde{g}_\Lambda$ est continue sur $\Lambda \cup \{\mathcal{A} \cap R_z\}$ et peut donc être prolongée, d'après le théorème de Tietze-Urisohn en une fonction $g_z \in \Omega_{R_z}$. L'application r_Λ^z étant contractante, et $\mathcal{J}_{R_z}$ dense dans Ω_{R_z}, on a le résultat.

- $\mathrm{Supp}(P_\Lambda) = \Omega_\Lambda$ (propriété des mesures quasi-invariantes).

<u>Corollaire 2.3.</u> :

1). Soit Λ compact de $\mathbb{R}_+^2$, $a \in \Lambda$. Soit P_Λ^a la loi de $(\underline{X}_u - \underline{X}_a \; u \in \Lambda)$ sur $\Omega_\Lambda^a = \{v \in \Omega_\Lambda \; ; \; v(a) = 0\}$. On a le même résultat que dans le théorème pour le triplet

$$(P_\Lambda^a \; ; \; \mathcal{J}_\Lambda^a = \{u - u(a),\ u \in \mathcal{J}_\Lambda\} \; ; \; \Omega_\Lambda^a)$$

2). Soit γ chemin, $a \notin \gamma$.

Soit P_γ^a la loi de $(\underline{X}_u - \underline{X}_a, u \in \gamma)$ sur Ω_γ .
On a le même résultat que dans le théorème pour le triplet :

$$(P_\gamma^a, \mathfrak{I}_\gamma^a = \{u|_\gamma - u(a), u \in \mathfrak{I}\}, \Omega_\gamma)$$

<u>Preuve</u> - 1). La quasi invariance de P_Λ^a sous $\mathfrak{I}_\Lambda^a$ découle de :

$$P_\Lambda^a = s_\Lambda^a(P_\Lambda), \text{ avec } s_\Lambda^a(u) = u-u(a),\ u \in \Omega_\Lambda$$

De plus, $\mathfrak{I}_\Lambda^a$ est dense dans Ω_Λ^a : en effet, soit $g \in \Omega_\Lambda^a \subseteq \Omega_\Lambda$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $u \in \mathfrak{I}_\Lambda$ tel que : $||g-u||_\Lambda \leq {}^\varepsilon/_2$
ceci entraîne : $|u(a)| \leq {}^\varepsilon/_2$ et donc $||g-(u-u(a))||_\Lambda \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

2). Posons $\Lambda = \gamma \cup \{a\}$; les espaces Ω_Λ^a et Ω_γ sont en bijection à l'aide de :

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda^a &\to \Omega_\gamma \\ v &\to v|_\gamma \end{aligned}$$

, ce qui entraîne le résultat d'après 1). ∎

On a évidemment des résultats analogues pour $\mathbb{P}$, loi du processus de Wiener complexe à deux paramètres sur $\Omega = \{f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C} ; f|_{\mathcal{a}} \equiv 0\}$
En particulier, $\text{supp}(\mathbb{P}_\Lambda) = \Omega_\Lambda$ et $\text{supp}(\mathbb{P}_\gamma^a) = \Omega_\gamma$, avec les notations du corollaire II.2.3, modifiées de façon évidente.

3.- Indice d'un point par rapport à certains lacets browniens.

Dans toute la suite, sauf précision contraire, γ désigne le bord orienté d'un rectangle Γ de $\mathbb{R}_+^2$, de côtés parallèles aux axes, et ne touchant pas les axes. On parcourt γ dans le sens direct à partir du sommet z_o de coordonnées minimales. z_o, z_1, z_2, z_3, $z_4 = z_o$ désignant les sommets de γ rencontrés successivement. On pose $\gamma_i = [z_i, z_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq 3)$.

D'après les propriétés du mouvement brownien complexe, on a : $\forall\, a \in \mathbb{C}$, $P[\exists u \in \gamma\ ,\ Z_u = a] = 0$. L'indice $I_\gamma(a) \triangleq I\,(Z_\gamma(\omega), a)$ du point a par rapport à $Z_\gamma(\omega)$ est donc presque sûrement défini, ainsi que l'intégrale stochastique $\int_\gamma \frac{1}{Z_u - a}\, dZ_u$. De plus, d'après la formule (11), on a :

$$I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dZ_u}{Z_u - a} \quad \text{ps.} \tag{13}$$

3.1.- Vérifions maintenant que les indices $I_\gamma(a)$ ne sont pas p.s. nuls, (auquel cas la formule de Cauchy que l'on se propose d'écrire se réduirait à $0 \equiv 0$!).

Théorème 3.1. :

Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ chemin fermé, $\gamma^* \subset \mathbb{R}_+^2$ tel que $\{a\}$ soit polaire pour $\{Z_u, u \in \gamma\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un sous-ensemble mesurable de Ω, de probabilité positive, sur lequel l'indice de a par rapport à $Z_\gamma(\omega)$ est égal à n.

Preuve - Reprenons les notations de II.2, où l'on a démontré que $\text{supp}(\mathbb{P}_\gamma) = \Omega_\gamma$. Soit $(C_u, u \in \gamma)$ un chemin fermé, à valeurs dans $\mathbb{C}$, tel que l'indice de a par rapport à C soit n ($n \in \mathbb{Z}$, fixé) . Soit $\varepsilon = d(C,a) > 0$. On a : $Z_u(\omega)-a = (Z_u(\omega)-C_u) + C_u-a$, et $\forall u \in \gamma$, $|Z_u(\omega)-C_u| < |C_u-a|$ sur l'ensemble $M=\{\omega | \sup_{u \in \gamma} |Z_u(\omega)-C_u| \leq \varepsilon/2\}$.

D'après une propriété classique des indices ([2], page 64), on a donc $I_\gamma(a) = I(C,a) = n$ sur M, et d'après II.2, $\mathbb{P}_\gamma(M) > 0$, d'où le résultat.

3.2.- Voici une application du théorème précédent concernant les trajectoires de Z :

Théorème 3.2. :

Soit $a \in \mathbb{C}$, et γ chemin fermé, $\gamma^* \subseteq \mathbb{R}^2_+$, tel que a soit polaire pour $\{Z_u , u \in \gamma\}$. On suppose de plus que γ^* est le bord d'un compact Γ de $\mathbb{R}^2_+$, et que γ^* est Γ homotope à 0.

Alors, $P[\exists u \in \Gamma , Z_u = a] > 0$.

Preuve - D'après le théorème II.3.1., on a : $P[I_\gamma(a) \neq 0] > 0$. On aura donc le résultat cherché si l'on montre : $\{I_\gamma(a) \neq 0\} \subseteq \{\omega | \exists u \in \Gamma , Z_u(\omega) = a\}$, ou de façon équivalente $A \equiv \{\omega | \forall u \in \Gamma , Z_u(\omega) \neq a\} \{I_\gamma(a) = 0\}$. Or, par hypothèse, γ^* est Γ-homotope à $\{z_0\}$ ($z_0 \in \Gamma$), et donc sur A, $Z_\gamma(\omega)$ est $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ homotope à $\{Z_{z_0}(\omega)\}$, ce qui entraîne $I_\gamma(a) = 0$ sur A.

On en déduit le :

Corollaire 3.2. :

Soit Γ rectangle de côtés parallèles aux axes, et $a \in \mathbb{C}$. Alors, $P [\exists u \in \Gamma, Z_u = a] > 0$.

Il peut être intéressant de remarquer que, par exemple pour $\Gamma = R_z$, le résultat précédent peut aussi être démontré en étendant au cas complexe le calcul stochastique développé en (1), et en particulier la formule de Green : en effet, supposons que (*) $P[\exists u \in R_z,\ Z_u = a] = 0\ (a \neq 0)$.

Notons $H_z = \{(u,y) \mid u \leq x\}$, $V_z = \{(x,v)\ ;\ v \leq y\}$ et $\gamma_z = H_z - V_z$. On a alors

$$\int_{H_z} \frac{1}{(Z_u - a)}\, dZ_u \underset{ps}{=} \int_{V_z} \frac{1}{(Z_u - a)}\, dZ_u \underset{ps}{=} \int_{R_z} \frac{1}{(Z_u - a)}\, dZ_u - \int_{R_z} \frac{1}{(Z_u - a)^2}\, dJ_Z(u)$$

d'après la formule de Green convenablement étendue à la situation (pour la définition de la martingale J_Z, voir [1], paragraphe 6 ; d'autre part, d'après l'hypothèse (*), les intégrales stochastiques écrites sont bien définies).

On a donc :

$$I_{\gamma_z}(a) = \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_{H_z} \frac{dZ_u}{(Z_u - a)} - \int_{V_z} \frac{dZ_u}{Z_u - a} \right\} = 0 \quad \text{ps, ce qui est contraire}$$

au résultat du théorème II.3.1. (*) n'est donc pas vérifiée.

Remarque - L'analogue du théorème II.3.1. pour le mouvement brownien plan $(Z_t,\ t \geq 0)$ a été obtenu par P. Lévy en [7], page 237, les lacets considérés étant constitués par la trajectoire $(Z_u(\omega),\ s \leq u \leq t)$ $(s < t)$, à laquelle on adjoint la corde $[Z_t(\omega),\ Z_s(\omega)]$. Bien entendu, dans ce cadre, il n'y a pas d'analogue du théorème II.3.2.

4.- Théorème des résidus et formule de Cauchy

A l'aide du théorème I.3.2., on peut formuler le théorème des résidus le long de certains lacets browniens en termes d'intégrales stochastiques.

Théorème 4.1. :

Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E)$, où E est l'ensemble des points singuliers isolés de f. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(Z_u)\, dZ_u = \sum_{(e \in E)} I_{\gamma}(e)\, \text{Rés}(f,e) \quad P \text{ p.s.}$$

Remarque - Les deux membres de l'égalité sont bien définis : le membre l'est car E est dénombrable, et polaire pour Z, le nombre de droite car $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, où $\Omega_n = \{\omega \mid |Z_\gamma(\omega)| \leq n\}$; or, $E_n = \{e \in E \mid |e| \leq n\}$ est fini, et pour $\omega \in \Omega$, $e \in E \setminus E_n$, $I_\gamma(e) = 0$ P ps.

Corollaire 4.1. :

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, et $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a)\ I_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(Z_u)}{(Z_u-a)^{n+1}}dZ_u. \quad P \text{ ps.}$$

III - INDICE D'UN POINT RELATIVEMENT A CERTAINS LACETS BROWNIENS : SECONDE DEFINITION.

On s'est interessé en II à l'indice du point a déterministe par rapport aux lacets $Z_\gamma(\omega)$ (on emploie les mêmes notations qu'en II). La formule de Cauchy obtenue en II.4. est :

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \forall a \in \mathbb{C}, \; f(a) I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(Z_u) dZ_u}{(Z_u - a)}$$

Cependant, du point de vue probabiliste, il semble aussi intéressant d'obtenir une formule de Cauchy, où le membre de gauche serait $f(Z_a)\ I(Z_\gamma(\omega),\ Z_a(\omega))$. C'est le but de ce troisième chapitre.

1.- Seconde définition de l'indice.

1.1.- On utilise toujours les notations de II.3 et l'on suppose maintenant $a \notin \mathcal{a}$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. L'existence de l'indice du point aléatoire $Z_a(\omega)$ par rapport à la courbe $Z_\gamma(\omega)$ est p.s. assurée par la :

Proposition 1.1. :

Soit I un segment de $\mathbb{R}_+^2$ parallèle à l'un des axes, et $a \notin I$. Alors, $P[\exists z \in I,\ Z_z = Z_a] = 0$.

Preuve - A l'évidence, on peut supposer I parallèle à l'axe des abscisses. Notons $I = [z_o, z_1]$ avec $z_o = (x_o, y_o)$, $z_1 = (x_1, y_o)$ et $x_o < x_1$; $a = (x_a, y_a)$. On distingue ensuite dans l'étude les cas suivants :

α) $x_a \leq x_o$

β) $x_a \geq x_1$, $y_a \geq y_o$

γ) $x_a \geq x_1$, $y_a \leq y_o$

α) Le processus $(\hat{Z}^a_x = Z_{(x,y_o)} - Z_a\ ,\ x_o \leq x \leq x_1)$ est une $\mathcal{F}^1_{(x,y_o)}$ martingale conforme, dont la variable initiale n'est pas nulle, et donc pour qui 0 est polaire.

β) Paramètrons $-I$ par $x_t = x_1 + t(x_o - x_1)$, $t \in [0,1]$. Le processus $(\hat{Z}^a_{z_t} = Z_{(x_t,y_o)} - Z_a,\ t \in [0,1])$ est une $\mathcal{F}^+_{z_t}$ martingale conforme ne partant pas de 0 $(\mathcal{F}^+_z = \sigma\{Z(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+),\ A \subset R^c_z)$.

γ) $\gamma.1$)) On fait tout d'abord la remarque : soit $\mathbb{W}$ la loi sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ du mouvement brownien $(U_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ partant de 0 en $t=0$ ou plutôt, pour l'application ci-dessous, de $U_t = \sqrt{y}.Z_t$, avec Z_t mouvement brownien complexe, et $Z_o = 0$. On note $(\mathbb{W}^z,\ z \in \mathbb{C})$ une version régulière de la loi conditionnelle de $\mathbb{W}$ quand U_{t_o} $(t_o > 0$ fixé). On pose $p_z(u) = \mathbb{W}^z\ [\exists 0 < s \leq t_o,\ U_s = u]$.

Le résultat de polarité maintes fois employé entraîne :

$\forall u \in \mathbb{C},\ p_z(u) = 0$ dx dy - ps (*).

$\gamma.2$)) Revenons à notre problème. On note $D = \{z \in \mathbb{C} | x \geq 0,\ y = y_o\}$.

On décompose Z_a en $Z_a = Z^1_a + Z^2_a$, Z^1_a étant la projection orthogonale de Z_a sur $\mathcal{G}_D$ (espace gaussien engendré par les Z_z, $z \in D$). On a

$$Z^1_a = \frac{y_a}{y_o}\ Z_{(x_a,y_o)}$$

d'où

$$\begin{aligned} p_a &\triangleq P[\exists\ s \in I,\ Z_s - Z_a = 0\,] \\ &= \int p_2(z)\ dx\ dy\ P[\exists\ s \in I,\ Z_s - (Z^1_a + z) = 0] \\ &= \int p_2(z)\ dx\ dy \int p_1(z')dx'\ dy'\ p_{z'}(\frac{y_a}{y_o}\ z' + z)\,; \end{aligned}$$

où $z = (x,y)$, $z' = (x',y')$, $p_1(z')$ (resp. $p_2(z)$) est la densité de $Z_{(x_a,y_o)}$ (respectivement Z_a^2).

En faisant le changement de variable (en z) $u = \frac{y_a}{y_o} z'+z$, et à l'aide du théorème de Fubini, on a :

$$p_a = \int p_1(z')dx'\,dy' \int p_2(z)\,dx\,dy\,p_{z'}(\frac{y_a}{y_o} z'+z)$$

$$= \int p_1(z')\,dx'dy' \int p_2(u-\frac{y_a}{y_o} z')\,dx_u dy_u\,p_{z'}(u)$$

$$= \int dx_u dy_u \int dx'dy'\,p_1(z')\,p_2(u-\frac{y_a}{y_o}z')p_{z'}(u) = 0$$

(d'après (*)) ∎

1.2.- Ainsi, on a donc, si $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $P[Z_a \notin Z_\gamma] = 1$. On peut donc définir l'indice : $J_\gamma(a,\omega) \triangleq \frac{1}{2i\pi} \int_{Z_\gamma(\omega)} \frac{dz}{z-Z_a(\omega)}$. De même, qu'en II.3, on a le

Théorème 1.2. :

Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ chemin fermé, $\gamma^* \subset \mathbb{R}_+^2$, tel que $P\{Z_a \notin Z_\gamma\} = 1$. Alors, pour tout $n \in Z$, il existe un sous-ensemble mesurable de Ω, de probabilité positive, sur lequel $J_\gamma(a,\omega) = n$ ps. La démonstration est analogue à celle du théorème II.3.1., compte-tenu du résultat de II.2. : $\text{supp}(\mathbb{P}_\gamma^a) = \Omega_\gamma$.

2.- Définition d'intégrales stochastiques et seconde formule de l'indice.

On veut maintenant - comme pour $I_\gamma(a)$ - pouvoir représenter $J_\gamma(a)$ comme intégrale stochastique ; pour cela, il s'agit de définir $\int_I f(Z_u-Z_a)dZ_u$ pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ dans tous les cas α), β), γ) de III.1.

Cas α) : Il n'y a aucune difficulté, le processus $(\hat{Z}^a_x \ , \ x_o \leq x \leq x_1)$ étant une $\mathcal{F}^1_x$ martingale. De plus, cette martingale est conforme et on a donc, d'après le théorème I.3.2.,

$$\int_{x_o}^{x_1} f(Z_{u,y_o} - Z_a)dZ_{u,y_o} \overset{=}{ps} \int_{Z_I(\omega)\ -Z_a(\omega)} f(z)dz$$

$$= \int_{Z_I(\omega)} f(z-Z_a(\omega))dz.$$

Cas β) : On fait le même raisonnement en parcourant $(-I)$ (voir β) en III.1). On a de même :

$$\int_I f(Z_u-Z_a)dZ_u = \int_{Z_I(\omega)} f(z-Z_a(\omega))dz.$$

Cas γ) : C'est le seul cas qui ne soit pas évident a priori, car $f(Z_z-Z_a)$ n'est pas adpaté aux tribus $\mathcal{F}_z$ (ou $\mathcal{F}^1_z$).

Avant de continuer, précisons les notations suivantes : si $z \in I$, on note $_az = (x,y_a)$ $\mathcal{F}^-_z = \sigma\{Z(\Gamma)\ ;\ \Gamma \in \mathcal{E}_\mu\ \ \Gamma \subset (R_{[z,\infty]})^c\} \vee \mathcal{N}$

$$\mathcal{F}^+_z = \sigma\{Z(\Gamma)\ ;\ \Gamma \in \mathcal{E}_\mu\ ,\ \Gamma \subset (R_{[o,z]})^c\} \vee \mathcal{N}$$

On remarque alors que $Z_z-Z_a = {}^aZ_z + {}_aZ_z$, avec ${}^aZ_z = Z_z-Z_{_az}$ et ${}_aZ_z = Z_{_az}-Z_a$ $(z \in I)$. $({}^aZ_z \ , \ z \in I)$ est une $\mathcal{F}^-_{_az}$ martingale conforme et ${}_aZ_z, \ z \in (-I))$ une $\mathcal{F}^+_{_az}$ martingale conforme.

Donc, si $\{\Phi(u,\omega)\}$ $(u \in I)$ (resp $(u \in -I)$) est un processus

$\mathcal{F}^{-}_{a\,u}$ (resp. $\mathcal{F}^{+}_{a\,u}$.) bien mesurable vérifiant (**) $\int_I |\Phi(u,\omega)|^2\, du < \infty$ ps,

l'intégrale stochastique $\int_I \Phi(u,\omega)\, d\,{}^aZ_u(\omega)$ (resp. $\int_{-I} \Phi(u,\omega)\, d_aZ_u$) est

bien définie.

Comme $\sigma\{Z_z - Z_a\} \subseteq \mathcal{F}^{\pm}_{a\,z}$, on peut donc poser comme définition, pour toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, borélienne, telle que $\Phi(u,\omega) = f(Z_u - Z_a)$ vérifie (**) :

$$\int_I f(Z_z - Z_a)\, dZ_z \triangleq \int_I f(Z_z - Z_a)\, d^aZ_z - \int_{(-I)} f(Z_z - Z_a)\, d_aZ_z .$$

On a ainsi défini l'intégrale stochastique $\int_I f(Z_u - Z_a)\, dZ_u$, pour toute fonction $f \in C\{\mathbb{C}\setminus\{0\}, \mathbb{C}\}$ dans tous les cas, et on peut énoncer la :

Proposition 2.1. :

Soit $a \notin \gamma^*$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, on a :

$$\int_\gamma f(Z_z - Z_a)\, dZ_z = \int_{Z_\gamma(\omega)} dz\, f(z - Z_a(\omega)) \text{ ps}$$

En particulier :

$$J_\gamma(a,\omega) = \frac{i}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dZ_u}{(Z_u - Z_a)} \text{ ps.}$$

Preuve - Avec les notations de III.1, il suffit de démontrer pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$,

$$\int_I f(Z_z - Z_a)\, dZ_z = \int_{Z_I(\omega)} dz\, f(z - Z_a(\omega)) \text{ ps}$$

dans le cas γ), l'égalité pour les cas α) et β) découlant du théorème I.3.2.. Il suffit de montrer, que pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$,

$$R.\int_I f(Z_z-Z_a)d\,{}^aZ_z = \int_I f(Z_z-Z_a)d\,{}^aZ_z\ ,$$

où

$$R.\int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_z = \exists(\underset{(n\to\infty)}{\mathrm{P.lim}}\ \sum_{\tau_n}\int_0^1 f\{Z_{t_i}-Z_a+\lambda(Z_{t_{i+1}}-Z_{t_i})d\lambda\ ({}^aZ_{t_{i+1}}-{}^aZ_{t_i})$$

$\exists$(P.lim) désignant la limite en probabilité, si elle existe, et la même égalité en remplaçant I par (-I) et ${}^aZ$ par ${}_aZ$. Ces résultats découlent du lemme suivant :

<u>Lemme 2.2.</u> :

On se place dans le cas γ) de III.1. Soit $f \in C^1(\mathbb{C}\setminus\{0\},\mathbb{C})$. On a alors :

$$R.\int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_z = \int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_a+(y_o-y_a)\int_I \frac{\partial f}{\partial}(Z_u-Z_a)du.$$

<u>Preuve</u> - On procède comme en I.2, c'est à dire que l'on étudie $R.\int_I f(X_z-X_a)\,d^aX_z$, pour X processus de Wiener réel, à deux paramètres, et $f \in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis on déduit l'expression de $R.\int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_z$ par complexification pour $f \in C_b^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$, puis par limite en probabilité pour $f \in C^1(\mathbb{C}\setminus\{0\},\mathbb{C})$.

1). Soit (τ_n) une suite de subdivisions standard de I. On a alors, pour $f \in C_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\sum_{\tau_n} \int_o^1 f[X_{t_i}-X_a+\lambda(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}]d\lambda \quad ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})$$

$$= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i}-X_a)({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) + \sum_{\tau_n} \int_o^1 \lambda d\lambda \int_o^1 d\mu \; f'(X_{t_i}-X_a+\lambda\mu(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}))$$

$$\times (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})$$

$$= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i}-X_a)({}^aX_{t_{i+1}}-{}^aX_{t_i}) + \frac{1}{2}\sum_{\tau_n} f'(X_{t_i}-X_a)(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}}-{}^aX_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_o^1 \lambda d\lambda \int_o^1 d\mu \; [f'(X_{t_i}-X_a+\lambda\mu(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})) - f'(X_{t_i}-X_a)]$$

$$\times (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}).$$

La première somme converge dans L^2 vers $\int_I f(X_u-X_a)d^aX_u$.

Pour la seconde, examinons de façon générale :

$$\sum_{\tau_n} \phi(X_{t_i}-X_a)(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}}-{}^aX_{t_i}) \quad (\text{pour } \phi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

$$= \sum_{\tau_n} \phi(X_{t_i}-X_a)({}^aX_{t_{i+1}}-{}^aX_{t_i})^2 + \sum_{\tau_n} \phi(X_{t_i}-X_a)({}_aX_{t_{i+1}}-{}_aX_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}}-{}^aX_{t_i}).$$

D'après le lemme I.2.2., la première somme converge dans L^2 vers $\int_I \phi(X_u-X_a)d < {}^aX,{}^aX >_u$ où $< {}^aX,{}^aX >$ désigne le processus croissant continu associé à la martingale $({}^aX_u\ ,\ u \in I)$.

Pour la seconde somme, remarquons que les processus $\{{}^aX_t,\ t \in I\}$ et $\{{}_aX_t,\ t \in I\}$ sont indépendants. On a alors :

$$E\left[\{\sum_{\tau'_n} \phi(X_{t_i}-X_a)({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})\}^2\right]$$

$$= \sum_{\tau_n} E\left[\phi^2(X_{t_i}-X_a)({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2\ ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2\right]$$

$$\leq ||\phi||_\infty^2 \sum_{\tau_n} E\left[({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2\right] E(({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2)$$

Or, $E({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2 = (t_{i+1}-t_i)y_a$;

$E(({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2) = (y_o-y_a)(t_{i+1}-t_i)$ et donc la somme précédente converge vers 0 lorsque $(n \to \infty)$.

On a donc :

$$R.\int_I f(X_u-X_a)d^aX_u = \int_I f(X_u-X_a)d^aX_u + \frac{1}{2}\int_I f'(X_u-X_a)d<{}^aX,{}^aX>_u.$$

2). Dans le cas complexe, pour $f \in C_b^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la formule précédente devient :

$$R.\int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_z$$

$$= \int_I f(Z_z-Z_a)d^aZ_z + \frac{1}{2}\int_I \{\frac{\partial f}{\partial z}(Z_z-Z_a)d<{}^aZ,{}^aZ>_z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(Z_z-Z_a)d<\overline{{}^aZ},{}^aZ>_z.$$

Mais, $({}^aZ_z, z \in I)$ est une martingale conforme, et donc $< {}^a\bar{Z}, {}^aZ > = 0$ et $< {}^aZ, {}^aZ >_{s,y_o} = 2 < {}^aX, {}^aX >_{s,y_o} = 2(y_o - y_a).s.$

On obtient finalement le résultat cherché par approximation de f, et convergence en probabilité.

Remarque - Les difficultés apparues dans ce paragraphe sont semblables à celles qu'il y a à définir les intégrales stochastiques linéaires $\int_I \Phi(u,\omega)dX_u$, pour le processus de Wiener à 2 paramètres, réel, le long de γ, courbe qui n'est ni croissante, ni décroissante pour l'ordre partiel sur $\mathbb{R}_+^2$ (voir (1), paragraphe 4).

3.- Remarque sur la formule de Cauchy

De même qu'en III.2, il faudrait maintenant définir les intégrales stochastiques $\int_I \frac{f(Z_u)dZ_u}{(Z_u - Z_a)}$, au moins pour f régulière. Malheureusement, nous ne savons le faire que dans le cas α), où l'intégrand est $\mathcal{F}_u^1$ adapté. Dans les autres cas, les tribus engendrées par le couple (Z_u, Z_a) (ou $(Z_u, Z_u - Z_a)$!) sont trop "vastes" pour faire les calculs d'orthogonalité permettant la construction d'intégrales stochastiques. Cependant, nous noterons dans tous les cas (et on vérifie dans le cas α)) :

$$\int_I \frac{f(Z_u)dZ_u}{(Z_u - Z_a)^p} = \int_{Z_I(\omega)} \frac{f(z)dz}{(z - Z_a(\omega))^p} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

On a alors bien sûr : si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $a \notin \gamma^*$, $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(Z_a(\omega))J_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(Z_u)}{(Z_u - Z_a)^{n+1}} dZ_u \quad \text{ps.}$$

4.- Remarques finales et questions ouvertes

Nous nous sommes limités en général au cas où γ est le bord d'un rectangle de côtés parallèles aux axes ; les résultats de II s'étendent évidemment au cas où γ est une courbe fermée, décomposée en un nombre fini de courbes croissantes ou décroissantes au sens large pour la relation $(z < z') = (x \leq x', y \leq y')$. A ce sujet, la première question qui se pose pour étendre les résultats de II à une classe plus vaste de courbes est la suivante : pour quelles courbes γ , et $a \in C$, $\{a\}$ est-il polaire pour Z_γ ?.

- D'après le corollaire II.3.2., on a, pour Γ rectangle de côtés parallèles aux axes, et $a \in \mathbb{C}$, $P[\exists u \in \Gamma , Z_u = a] > 0$.

A t on en fait : $P[\exists u \in \Gamma , Z_u = a] = 1$?.

- Peut-on localiser le théorème des résidus, ou la formule de Cauchy obtenus en II, c'est à dire les énoncer pour $f \in \mathcal{H}(U)$, U ouvert de $\mathbb{C}$? Ici encore, c'est la notion de temps (ou d'ensemble) d'arrêt pour les processus à deux paramètres, qui fait défaut.

- La remarque III.3. sur la formule de Cauchy semble indiquer que, poour une définition raisonnable de la notion de processus holomorphes, l'ensemble de ces processus (supposés $\mathcal{F}_u$.adaptés, et en tout état de cause, satisfaisant "la formule de Cauchy") ne saurait comprendre d'autre processus que $f.Z_z$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Nous espèrons revenir sur cette question.

REFERENCES

1.- R. CAIROLI & J.B. WALSH : "Stochastic integrals in the plane" Acta Mathematica (134 : 1-2) 111-183 (1975).

2.- H. CARTAN : "Théorie élémentaire des fonctions analytiques". Hermann, 1961.

3.- B. DAVIS : "On the distribution of measurable functions of non negative measures". Duke Math. Journal Vol. 40 n° 3, sept. 73.

"On the weak-type (1,1) inequality for conjugate functions". Proceedings or the Amer. Math. Society, Vol. 44 n° 2, juin 74.

4.- H. FOLLMER : "Stochastic holomorphy". Math. Ann. 207, 245-255 (1974).

5.- R. GETOOR & M. SHARPE : "Conformal martingales". Inventiones Math. (16), 271-308 (1972).

6.- K. ITO & H.P. McKEAN : "Diffusion processes and their sample paths".

7.- P. LEVY : "Processus stochastiques et mouvement brownien". Gauthier-Villars (Paris). Seconde édition (1965).

8. H.P. McKEAN : Stochastic integrals". Academic Press (1969).

9.- J. NEVEU : Notes sur l'intégrale stochastique. Cours de 3ème cycle- second semestre 1972 - Lab. de Probabilités. Université Paris VI.

10.- W. PARK : "A multiparameter gaussian process". Ann. Math. Stat. 41, 1582-1585 (1970).

11.- F. SPITZER : "Some theorems concerning 2-dimensional brownian motion". Trans. Amer. Math. Soc. 87, 187-197 (1958).

12.- E. WONG & M. ZAKAI : "Riemann. Stieltjes approxiamations of stochastic integrals".
Z. Wahr. verw. Geb. 12, 87-97 (1969).

13.- J. YEH : "Cameron-Martin translation theorems in the Wiener space of functions of two variables".
Trans. Amer. Math. Soc. 107 (409-420)(1963).