ETUDE DE CERTAINS PROCESSUS (STOCHASTIQUEMENT) DIFFERENTIABLES OU HOLOMORPHES.

INTRODUCTION

La notion de processus holomorphe développée par R. Cairoli et J.B. Walsh en (1) est étendue dans le cadre du processus de Wiener complexe à deux paramètres $(Z_z,\ z \in \mathbb{C}^+ = \mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}_+)$.

Plus généralement, on étudie les processus $(\Phi_z,\ z \in \mathbb{C}^+)$ de carré intégrable pour tout z, et tels qu'il existe deux processus (que l'on pourra choisir continus) $\frac{\partial\Phi}{\partial Z}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial \overline{Z}}$ avec :

$$\forall z \in \mathbb{C}^+,\ \Phi_z = \Phi_o + \int_{H_z} \{\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\, \partial_1 Z + \frac{\partial\Phi}{\partial \overline{Z}}\, \partial_1 \overline{Z}\}$$

$$= \Phi_o + \int_{V_z} \{\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\, \partial_2 Z + \frac{\partial\Phi}{\partial \overline{Z}}\, \partial_2 \overline{Z}\}$$

où $H_z = \{u+iy \mid u \leq x\}$ et $V_z = \{x+iv \mid v \leq y\}$ $(z=x+iy)$ (on dit que Φ est différentiable par rapport à (X,Y) ou $(Z,\overline{Z})$). On dit que Φ est holomorphe (par rapport à Z) si $\frac{\partial\Phi}{\partial \overline{Z}} = 0$.

Les principaux résultats obtenus, sont :

α) Si Φ est différentiable, $\frac{\partial\Phi}{\partial Z}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial \overline{Z}}$ le sont aussi.

β) $$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\Phi\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial Z}\Phi\right)$$

γ) Il y a bijection entre l'espace des processus holomorphes et

$$= \{f \text{ entière } \mid f(z) = \sum_{p=o}^{\infty} a_p \frac{z^p}{p!}\ ;\ \forall r > 0,\ \sum_{p=o}^{\infty} |a_p|^2 \frac{r^p}{p!} < \infty\}$$

au moyen de $\Phi_z = f \circ Z_z$.

On étudie, au premier paragraphe, les processus indéfiniment dérivables par rapport à une martingale $(M_t, t \geq 0)$ de carré intégrable pour tout t et de processus croissant $\langle M,M \rangle_t = t$.

Le second paragraphe est consacré à rétablir dans le cadre du processus de Wiener complexe à deux paramètres les résultats fondamentaux d'intégration stochastique (expression des martingales de carré intégrable, et formule de Green principalement) obtenus en [1] pour le processus de Wiener à deux paramètres, réel.

Enfin, au troisième paragraphe, on obtient les résultats énoncés précédemment.

1.- PROCESSUS INDEFINIMENT DERIVABLES PAR RAPPORT A UNE MARTINGALE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité complet, muni de la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ vérifiant les conditions habituelles. On suppose de plus $\mathcal{F} = \vee_t \mathcal{F}_t$. Soit $(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale nulle en 0. On désigne par $P^{(n)}(M)$ la n-ième puissance symbolique de M (voir [2], page 73), définie par la relation de récurrence : $P_t^{(n)} = \int_{]0,t]} P_{s^-}^{(n-1)}(M)\,dM_s$, et $P^{(1)}(M) = M$. En particulier, si M est une martingale locale continue, on a $P^{(n)}(M) = H_n(M, \langle M,M \rangle)$ où $H_n(x,t)$ désigne le n-ième polynôme de Hermite, c'est à dire le n-ième coefficient du développement en série de $\exp\{ux - \frac{1}{2}u^2 t\}$ par rapport à u. On dit qu'un processus $(\Phi_t, t \geq 0)$ adapté est dérivable par rapport à M s'il existe un processus $(\Phi_t^{(1)}, t \geq 0)$ - non unique a priori si M est quelconque - continu à droite, limité à gauche, et adapté tel que :

$$\Phi_t = \Phi_o + \int_o^t \Phi_{s^-}^{(1)}\,dM_s \qquad (1)$$

Φ est dit deux fois dérivable (par rapport à M) s'il est dérivable, ainsi que l'un des processus $\Phi^{(1)}$ pour lesquels (1) est vrai. On définit de même les processus n fois (ou indéfiniment) dérivables.

En s'inspirant du lemme 9.13 de [1] dans le cadre défini ci-dessus, on a le :

Théorème 1.1.

Soit M martingale de carré intégrable pour tout t telle que $\langle M,M\rangle_t = t$ (ce qui entraîne que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|M|^p$ est intégrable pour tout t).

Un processus $(\Phi_t, t \geq 0)$ de carré intégrable pour tout t est indéfiniment dérivable par rapport à M, si, et seulement si, il existe une suite $(a_n, n \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires $\mathcal{F}_o$ mesurables telle que

$$(2) \quad \begin{cases} (2.a) & \sum_n E(a_n^2)\frac{t^n}{n!} < \infty \quad \text{et} \\ (2.b) & \Phi_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n P_t^{(n)}(M) \end{cases}$$

Remarque 1.2.

D'après (2), les seuls processus $(\Phi_t,\ t \geq 0)$ indéfiniment dérivables par rapport à M, qui sont des martingales de carré intégrable (ie $\sup_t E(\Phi_t^2) = E(\Phi_\infty^2) < \infty$ sont les processus constants.

Démonstration du théorème :

a). Une récurrence facile entraîne que, pour toute variable $Y \in L^2(\mathcal{F}_o, P)$, $E\left[Y^2\{P_t^{(n)}(M)\}^2\right] < \infty$, et plus précisément $E\left[Y^2\{P_t^{(n)}M\}^2\right] = \frac{t^n}{n!}\ E(Y^2)$

b). On a : $\Phi_t = \Phi_o + \int_o^t \Phi_{s^-}^{(1)} dM_s$

et $\Phi_s^{(1)} = \Phi_o + \int_o^s \Phi_{u-}^{(2)} dM_u$.

En remplaçant $\Phi_{s-}^{(1)}$ par sa valeur dans la première égalité, et en itérant ce procédé, on obtient :

$$\Phi_t = \sum_{i=o}^{n} \Phi_o^{(i)} P_t^{(i)} + \int_{]0,t]} dMs_1 \int_{]0,s_1[} dMs_2 \ldots \int_{]0,s_n[} dM_{s_{n+1}} \Phi_{s_{n+1}}^{(n+1)}$$

Remarquons aussi que, d'après la première égalité, et l'hypothèse $E\left[\Phi_t^2\right] < \infty$, on obtient $E\int_o^t (\Phi_s^{(1)})^2 ds < \infty$, ce qui entraîne, la fonction $s \to E\left[(\Phi_s^{(1)})^2\right]$ étant croissante ($\Phi^{(1)}$ est une martingale localement de carré intégrable), que : $\forall t,\ E\left[(\Phi_t^{(1)})^2\right] < \infty$, et plus généralement $\forall n,\ \forall t,\ E\left[(\Phi_t^{(n)})^2\right] < \infty$.

On en déduit :

$$E\left[\{\Phi_t - \sum_{i=o}^{n} \Phi_o^{(i)} P_t^{(i)}(M)\}^2 \right] = \int_o^t ds_1 \ldots \int_o^{s_n} ds_{n+1}\, E\left[(\Phi_{s_{n+1}}^{(n+1)})^2\right]$$

expression majorée par $\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} E\left[(\Phi_t^{(n+1)})^2\right]$.

En appliquant la méthode utilisée dans le lemme 9.13 de [1], on obtient : $\lim\limits_{(n \to \infty)} \dfrac{t^n}{n!} E\left[(\Phi_t^{(n)})^2\right] = 0$. On a ainsi la représentation :

$\Phi_t = \sum_n a_n P_t^{(n)}(M)$, en posant $a_n = \Phi_o^{(n)}$.

D'autre part : $E\left[(\Phi_t)^2\right] = \lim\limits_{(n \to \infty)} E\left\{ \sum_{i=o}^{n} \Phi_o^{(i)} P_t^{(i)}(M)\right\}^2$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} E(\Phi_o^{(n)})^2 \frac{t^n}{n!} < \infty,$$ et on a ainsi obtenu (2).

Inversement, tout processus Φ_t défini à l'aide de la formule (2) est indéfiniment dérivable par rapport à M, de dérivée

$$\Phi_t^{(1)} = \sum_{n \geq 1} a_n P_t^{(n-1)}(M).$$

Remarque 1.3.

On a dû se restreindre, dans l'énoncé du théorème 1.1., à l'étude des processus indéfiniment dérivables par rapport à M, qui sont de carré intégrable pour tout t. Par contre, on ne sait rien dire si l'on supprime cette hypothèse. D'autre part, si Φ est seulement supposé indéfiniment dérivable par rapport à M (localement de carré intégrable), Φ est lui-même localement de carré intégrable. On ne sait donc rien dire non plus sur les processus de carré intégrable pour tout t, et indéfiniment dérivables par rapport à une martingale M de carré intégrable pour tout t telle que $\langle M,M\rangle_t = t \wedge T$, où T est un temps d'arrêt.

2.- CALCUL INTEGRAL STOCHASTIQUE RELATIF AU PROCESSUS DE WIENER COMPLEXE A DEUX PARAMETRES

Notons $\mathbb{C}^+ = \{z = x+iy \mid x \geq 0 \ , \ y \geq 0\}$

Dans toute la suite $\underline{Z} = (Z_z, z \in \mathbb{C}^+)$ désigne le processus de Wiener complexe à 2 paramètres, c'est à dire $Z_z = X_z + iY_z$, où X et Y sont deux processus de Wiener réels, à deux paramètres, et indépendants (voir (1) et (3)).

On adopte sur $\mathbb{C}^+$ les notations suivantes :

$z = x+iy \in \mathbb{C}^+$; $z' = x'+iy' \in \mathbb{C}^+$;

$(z \leq z') \iff \begin{matrix} x \leq x' \\ y \leq y' \end{matrix}$; $(z \wedge z') \iff \begin{matrix} x < x' \\ y > y' \end{matrix}$; $z \vee z' = (x \vee x', y \vee y')$

$R_{(o,z]} = \{z' = s+it \in \mathbb{C}^+ \mid 0 < s \leq x \ ; \ 0 < t \leq y \}$

2.1.- Voici trois familles de tribus importantes liées au processus $\underline{Z}$:

$$\mathcal{F}_z = \sigma\{Z_u,\ u \leq z\} \vee \mathcal{N}$$

$$\mathcal{F}^1_z = \sigma\{Z_{(s+it)},\ s \leq x\} \vee \mathcal{N}$$

$$\mathcal{F}^2_z = \sigma\{Z_{s+it},\ t \leq y\} \vee \mathcal{N}$$

où $\mathcal{N}$ désigne les ensembles $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{Z_u,\ u \in \mathbb{C}^+\}$ négligeables. On associe à chacune de ces filtrations leur tribu prévisible $\mathcal{P}(\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2)$ respective : rappelons, par exemple, que $\mathcal{P}$ est la tribu sur $\Omega \times \mathbb{C}^+$ engendrée par les processus continus et $\mathcal{F}_z$ adaptés.

Le but de ce sous-paragraphe est d'obtenir une formule de représentation des éléments de $\mathcal{M}^2$, espace des $\mathcal{F}_z$ martingales de carré intégrable pour tout z.

Pour cela, explicitons tout d'abord les différentes intégrales stochastiques qui vont intervenir par la suite :

. Si $H \in L^2_{loc}(\mathcal{P}) = \{K \in \mathcal{P}\ ;\ \forall z \in \mathbb{C}^+,\ E\int_{(0,z]} K^2_u\, du < \infty\}$,

on sait définir (voir [1]) les intégrales $(H.X)_z = \int_{(0,z]} H_s\, dX_s$ et $(H.Y)_z = \int_{(0,z]} H_s\, dY_s$.

Définissons, de plus, la tribu $\mathcal{P}_2$ sur $\Omega \times (\mathbb{C}^+)^2$, engendrée par les processus $\Phi(\zeta,\xi) = 1_{(\zeta \wedge \xi)}\ \Psi(\zeta,\xi)$, où Ψ est un processus continu sur $(\mathbb{C}^+)^2$, $\mathcal{F}_{\zeta \vee \xi}$ adapté.

. M et N désignent maintenant indifféremment les processus X ou Y.

Notons $L^2_{loc}(\mathcal{P}_2) = \left\{ \begin{array}{l} K \in \mathcal{P}_z\ ;\ K=0 \text{ hors de } \Delta = \{(\zeta,\xi) \mid \zeta \wedge \xi\} \\ \forall z \in \mathbb{C}^+,\ E\int_{(0,z] \times (0,z]} K^2(\zeta,\xi)\, d\zeta\, d\xi < \infty \end{array} \right\}$

Si $K = \alpha 1_{(a^1,b^1]}(\zeta)\, 1_{(a^2,b^2]}(\xi) \in L^2_{loc}(\mathcal{P}_2)$, on pose :

$$(K.MN)_z = \alpha M\{(a^1,b^1] \cap R_z\}\, N\{(a^2,b^2] \cap R_z\}.$$

On prolonge ensuite l'application $K \to K.MN$ par isométrie de $L^2_{loc}(\mathcal{P}_2)$ dans L^2. D'après l'inégalité de Doob-Cairoli ([1] théorème 1.2) on peut toujours choisir $K.MN$ continue.

Le théorème de Fubini, obtenu en [1] pour $K.MM$ s'étend à ce nouveau cadre. Il est donc licite d'écrire

$$(K.MN)_z = \int_{(0,z]} \left\{\int_{(0,z]} K(\zeta,\xi)dM_\zeta\right\}dN_\xi = \int_{(0,z]}\left\{\int_{(0,z]} K(\zeta,\xi)dN_\xi\right\}dM_\zeta \quad \text{ps}$$

(car le processus $\zeta \to \int_{(0,z]} K(\zeta,\xi)dN_\xi$, par exemple, admet une version $\mathcal{P}^2$ mesurable).

Remarquons également qu'il ne faut pas confondre les martingales $K.XY$ et $K.YX$, qui ne sont pas égales (car, par exemple, $E\,(K.XY)_z(K.YX)_z = 0$)

On peut maintenant énoncer le théorème de représentation des éléments de $\mathcal{M}^2$:

Théorème 2.1.

$L = (L_t,\ t \in \mathbb{C}^+)$ appartient à $\mathcal{M}^2$ si, et seulement si, il existe une constante L_o, deux processus A,B de $L^2_{loc}(\mathcal{P})$, et quatre processus C,D,E,F de $L^2_{loc}(\mathcal{P}_2)$ uniques (dans leurs espaces respectifs) tels que :

$$(3) \qquad L_t = L_o+(A.X)_t+(B.Y)_t+C.XX)_t+(D.XY)_t+(E.YX)_t+(F.YY)_t \quad \text{ps.}$$

En particulier tout élément de $\mathcal{M}^2$ admet une version continue.
La méthode utilisée pour démontrer ce théorème consiste à obtenir la formule 3 pour les martingales $M^{f,g}_z = \exp\left[\int_{(0,z]}\{f(u)dX_u+g(u)dY_u\}-\frac{1}{2}\int_{(0,z]}(f^2+g^2)(u)du\right]$

où f et g sont deux fonctions déterministes réelles telles que

$\int_{R_+^2} (f^2(u) + g^2(u))du < \infty$, et à remarquer que pour $z \in \mathbb{C}^+$, fixé, les variables $M_z^{f,g}$ que l'on vient de définir sont totales dans $L^2(\mathcal{F}_z, P)$. Ce travail est très semblable à celui effectué en [4], et il est donc omis ici.

<u>2.2.</u> Donnons maintenant une version de la formule de Green (stochastique) dans le cadre de cet article.

Si $z = x+iy \in \mathbb{C}^+$, on note $H_z = \{u+iy | u \leq x\}$, $V_z = \{x+iv \,;\, v \leq y\}$.

Notons par ailleurs $J_{M,N}(z) = (1_\Delta . MN)_z$, où $\Delta = (\zeta,\xi) | \zeta \wedge \xi\}$ et $M,N = X$ ou Y.

a). Soit un processus $(U_z, z \in \mathbb{C}^+)$ vérifiant les conditions suivantes :

- $U \in L^2_{loc}(\mathcal{P})$

- Il existe deux processus $p^2(u)$ et $q^2(u)$ appartenant à $L^2_{loc}(\mathcal{P})$ tels que on ait, ds ps :

$$\forall t,\ U_{(s+it)} = U_o + \int_{V_{s+it}} p^2(u)\ \partial_2 X_u + \int_{V_{s+it}} q^2(u)\ \partial_2\ Y_u \qquad \text{ps},$$

(on dit, pour un réel s, tel que ceci soit réalisé, que U admet des dérivées partielles par rapport à X et Y le long de $V_s = \{s+iv, v \geq 0\}$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}^+,$$

$$(4) \qquad \int_{H_z} U\, \partial_1 X = \int_{R_z} U\, dX + \int_{R_z} p^2\, d\, J_{X,X} + \int_{R_z} q^2\, d\, J_{Y,X}.$$

On a une formule analogue pour $\int_{H_z} U\, \partial_1\, Y$, en échangeant dans le membre de droite de (4) les processus p^2 et q^2, et X et Y.

b). Soit de même un processus $(U_z, z \in \mathbb{C}^+)$ vérifiant les conditions suivantes :

- $U \in L^2_{loc}(\mathcal{P})$

- Il existe deux processus p^1 et q^1 appartenant à $L^2_{loc}(\mathcal{P})$ tels que on ait, dt ps :

$$\forall s,\ U_{s+it} = U_o + \int_{H_{s,t}} p^1\, \partial_1 X + \int_{H_{s,t}} q^1\, \partial_1 Y.$$

Alors :

$$\forall z \in C^+,$$

$$\int_{V_z} U\, \partial_2 X = \int_{R_z} U\, dX + \int_{R_z} p^1\, dJ_{X,X} + \int_{R_z} q^1\, dJ_{X,Y}$$

(et une formule analogue pour $\int_{V_{s,t}} U \partial_2 Y$).

Ces formules et leurs démonstrations sont très analogues à celles figurant en [1]. Soulignons cependant la façon dont interviennent les mesures de Green "croisées" $J_{X,Y}$ et $J_{Y,X}$. En particulier, on a :

$$\int_{H_{s,t}} Y \partial_1 X = \int_{R_{s,t}} Y\, dX + J_{Y,X}(s,t) \quad \text{et}$$

$$\int_{V_{s,t}} Y \partial_2 X = \int_{R_{s,t}} Y\, dX + J_{X,Y}(s,t).$$

2.3. La restriction M^H (resp. M^V) à une horizontale H (resp. verticale V) d'une martingale $M \in \mathcal{M}^2$ est encore évidemment une martingale de carré intégrable pour tout $z \in H$ (resp. V). On note alors $< M^H, M^H >_z = < M,M >^H_z$, $z \in H$ et de même $< M,M >^V_z$, $z \in V$. Explicitons ces deux processus lorsque M est donnée par la formule (3) :

$$<M,M>^H_{s,t} = M_o^2 + \int_{R_{s,t}} \{A(v) + \int_{R_{\infty,t}} C(u,v)dX_u + \int_{R_{\infty,t}} E(u,v)dY_u\}^2 dv$$

$$+ \int_{R_{s,t}} \{B(v) + \int_{R_{\infty,t}} D(u,v)dX_u + \int_{R_{\infty,t}} F(u,v)dY_u)\}^2 dv,$$

où $R_{\infty,t} = \{z = x+iy,\ y \leq t\}$

On obtient bien sûr $<M,N>^H_{s,t}$ par polarisation ; de même en remplaçant $R_{\infty,t}$ par $R_{s,\infty} = \{ z = x+iy ; x \leq s \}$ on obtient :

$$< M,M >^V_{s,t} = M_o^2 + \int_{R_{s,t}} du \left[A(u) + \int_{R_{s,\infty}} C(u,v)dX_v + \int_{R_{s,\infty}} D(u,v)dY_v\right]^2$$

$$+ \int_{R_{s,t}} du \left[B(u) + \int_{R_{s,\infty}} E(u,v)dX_v + \int_{R_{s,\infty}} F(u,v)dY_v\right]^2$$

3.- ETUDE DES PROCESSUS DIFFERENTIABLES (RESP. : DES PROCESSUS HOLOMORPHES) PAR RAPPORT A (X,Y) (RESP. Z).

La caractérisation des processus holomorphes par rapport à Z découlera rapidement de celle des processus différentiables par rapport à (X,Y). Pour le déroulement des démonstrations, on s'inspire essentiellement du paragrpahe 9 de [1] . En conséquence, les démonstrations qui sont identiques mutatis mutandis - à celles de [1] seront omises.

Examinons tout d'abord certaines propriétés qui découlent de l'existence pour une martingale de dérivées partielles le long d'une horizontale ou d'une verticale :

Proposition 3.1.

Soit $M \in \mathcal{M}^2$, et $z_o = s_o + it_o$.

Supposons que M ait des dérivées partielles le long de H_{z_o} par rapport à X et Y, c'est à dire qu'il existe deux processus $(U_z,\ z \in H_{z_o})$ et $(V_z,\ z \in H_{z_o})$ mesurables et $\mathcal{F}_z$ adaptés, tels que :

$$M_{s,y_o} = M_o + \int_o^s U_{u,t_o}\, \partial_1 X_{u,t_o} + \int_o^s V_{u,t_o}\, \partial_1 Y_{u,t_o} \qquad (s \leq s_o)$$

avec

$$E\int_o^{s_o} (U_{u,t_o})^2 du < \infty \quad \text{et} \quad E\int_o^{s_o} (V_{u,t_o})^2 du < \infty$$

Alors, M a des dérivées partielles $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ le long de H_z, pour tout $z \in R_{z_o}$, par rapport à X et Y, qui sont respectivement des versions mesurables de $(s,t) \to E[U_{s,t_o} \mid \mathcal{F}_{s,t}]$ et $(s,t) \to E[V_{s,t_o} \mid \mathcal{F}_{s,t}]$.

Théorème 3.2.

Soit $z_o = s_o + it \in \mathbb{C}^+$, et $M \in \mathcal{M}^2$ représentée à l'aide de la formule (3).

Une condition nécessaire et suffisante pour que M ait des dérivées partielles $p(s)$ et $q(s)$ par rapport à X et Y le long de H_{z_o} est que, pour (s,v) et (s,v') en dehors d'un ensemble Lebesgue négligeable de R_{z_o}, et tels que $v \leq v' \leq t_o$, on ait

$$(5) \quad \begin{cases} A(s,v)-A(s,v') = \int_{R_{\infty,t_o}} [C(z;s,v')-C(z;s,v)]dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} [E(z;s,v')-E(z;s,v)]dY_z \\ B(s,v)-B(s,v') = \int_{R_{\infty,t_o}} [D(z;s,v')-D(z;s,v)]dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} [F(z;s,v')-F(z;s,v)]dY_z \end{cases}$$

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, alors, ps $z \in R_{z_o}$, et ps $s \leq s_o$, les fonctions de v $C(z;s,v)$, $D(z;s,v)$, $E(z;s,v)$ et $F(z;s,v)$ sont ps dv constantes.

Enfin, les dérivées partielles sont données par :

$$\begin{cases} p(s) = A(s,v) + \int_{R_{\infty,t_o}} C(z;s,v)dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} E(z;s,v)dY_z \\ q(s) = B(s,v) + \int_{R_{\infty,t_o}} D(z;s,v)dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} F(z;s,v)dY_z \end{cases} \quad \text{ps } v \leq t_o$$

<u>Preuve</u> : La méthode utilisée (voir [1]) consiste à calculer de deux manières différentes le processus $\langle M,M \rangle^{H_{z_o}}$. On peut évidemment supposer $M_o=0$. Alors, d'après <u>2.3</u>, en posant :

$$P(s,v) = A(s,v) + \int_{R_{\infty,t_o}} C(z;s,v)dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} E(z;s,v)dY_z$$

et

$$Q(s,v) = B(s,v) + \int_{R_{\infty,t_o}} D(z;s,v)dX_z + \int_{R_{\infty,t_o}} F(z;s,v)dY_z$$

on a

$$\text{(i)} \quad \langle M,M \rangle^{H_{z_o}}_{s,t_o} = \int_0^s \int_0^{t_o} (P^2+Q^2)(u,v)du\, dv.$$

D'autre part, on a par hypothèse :

$$\langle M,M \rangle^{H_{z_o}}_{s,t_o} = t_o \int_0^s (p^2(u)+q^2(u))du$$

$$= \frac{1}{t_o} \int_0^s \{(\frac{\partial}{\partial u} \langle M,X \rangle^{H_{z_o}}_{u,t_o})^2 + (\frac{\partial}{\partial u} \langle M,Y \rangle^{H_{z_o}}_{u,t_o})^2 \}du$$

Mais toujours d'après <u>2.3</u>, on a :

$$\langle M,X \rangle_{u,t_o} = \int_{R_{u,t_o}} P(\alpha)d\alpha \ ; \ \langle M,Y \rangle_{u,t_o} = \int_{R_{u,t_o}} Q(\alpha)d\alpha$$

et donc :

$$\text{(ii)} \quad <M,M>^{H_{z_0}}_{s,t_0} = \frac{1}{t_0}\int_0^s \{ (\int_0^{t_0} P(u,v)dv)^2 + (\int_0^{t_0} Q(u,v)dv)^2\}du$$

Les identités (i) et (ii) sont vraies pour tout s, et on obtient donc ds ps :

$$t_0 \int_0^{t_0} (P^2+Q^2)(s,v)dv = (\int_0^{t_0} P(s,v)dv)^2 + (\int_0^{t_0} Q(s,v)dv)^2.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a donc, ds ps :

$$t_0 \int_0^{t_0} P^2(s,v)dv = (\int_0^{t_0} P(s,v)dv)^2$$

et

$$t_0 \int_0^{t_0} Q^2(s,v)dv = (\int_0^{t_0} Q(s,v)dv)^2$$

D'après la même inégalité, ceci ne peut avoir lieu que si les fonctions de v $P(s,v)$ et $Q(x,v)$ sont dv ps constantes.

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème 9.9. de [1].

Le théorème suivant constitue le point crucial de l'étude. Par définition, $(\Phi_z, z \in \mathbb{C}^+)$ est dif partiellement différentiable par rapport aux processus X et Y s'il existe deux couples μεσξθαβωεσ et $\mathcal{F}_z$-adaptés $(p^1(z), q^1(z))$, $(p^2(z), q^2(z))$ tels que

$$\Phi_z = \Phi_0 + \int_{H_z} \{p^1 \partial_1 X + q^1 \partial_1 Y\}$$

et (6)

$$= \Phi_0 + \int_{V_z} \{p^2 \partial_2 X + q^2 \partial_2 Y\}$$

$$E \int_{H_z} (p^1+q^1)^2(u)du < \infty \quad ; \quad E\int_{V_z} (p^2+q^2)^2(u)du < \infty .$$

On a alors le :

Théorème 3.3

Soit Φ processus partiellement différentiable par rapport à X et Y. Alors :

a). Φ appartient à $\mathcal{M}^2$, et admet donc une version continue, notée encore Φ.

b). Φ est continûment différentiable, c'est à dire : il existe deux processus continus (p.s. et dans L^2) $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$ tels que

$$\Phi_z = \Phi_o + \int_{H_z} \{ \frac{\partial\Phi}{\partial X} \partial_1 X + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \partial_1 Y \}$$

$$= \Phi_o + \int_{V_z} \{ \frac{\partial\Phi}{\partial X} \partial_2 X + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \partial_2 Y \}$$

c). Les processus $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$ sont eux mêmes continument différentiables (et donc Φ est indéfiniment continument différentiable). Enfin,

$$\frac{\partial}{\partial Y} (\frac{\partial}{\partial X}\Phi) = \frac{\partial}{\partial X} (\frac{\partial}{\partial Y}\Phi).$$

Preuves : a). A l'aide des formules (6), on a pour $z < z'$:

$$E[\Phi_{z'} | \mathcal{F}_z] = \Phi_z, \text{ et donc } \Phi \in \mathcal{M}^2,$$

et admet, d'après le théorème 2.1, une version continue.

b). Représentons Φ à l'aide de la formule (3). D'après le théorème 3.2., on peut alors supposer que pour tout (s,t) la fonction de (σ,τ) $C[\sigma,t\ ;\ s,\tau]$ est constante ps $d\sigma\, d\tau$ sur $\sigma \leq s$, $\tau \leq t$ (et de même pour D,E,F). Notons alors $\hat{C}(s,t)$ cette constante (de même $\hat{D},\hat{E},\hat{F}$). On a alors : $H.MN = \hat{H}.J_{M,N}$, pour $H = C,D,E,F$, et $M,N = X$ ou Y. D'où :

$$(j) \quad \Phi_z = \Phi_o + (A.X)_z + (B.Y)_z + (\hat{C}.J_{XX})_z + (\hat{D}.J_{XY})_z + (\hat{E}.J_{YX})_z + (\hat{F}.J_{YY})_z$$

Appliquons à nouveau le théorème 3.2., pour en déduire, en transformant le membre de droite de l'égalité (5) que, si (s,t); $(s',t')(s,t')$ et (s',t) n'appartiennent pas à un ensemble négligeable F, et $s \leq s'$, $t \leq t'$, on a :

$$(jj) \quad \begin{cases} A_{s,t'} - A_{s,t} = \int_{[V_{s,t'}-V_{s,t}]} \hat{C}\partial_2 X + \hat{E}\partial_2 Y \\ A_{s',t} - A_{s,t} = \int_{[H_{s',t}-H_{s,t}]} \hat{C}\partial_1 X + \hat{D}\partial_1 Y \end{cases}$$

$$(jj') \quad \begin{cases} A_{s',t'} - A_{s',t} = \int_{[V_{(s',t')}-V_{(s',t)}]} (\hat{C}\partial_2 X + \hat{E}\partial_2 Y) \\ A_{(s',t')} - A_{(s,t')} = \int_{[H_{(s',t')}-H_{(s,t')}]} \end{cases}$$

et les équations analogues pour B, notées (jjj) et (jjj').

Ecrivons seulement :

$$(jjj) \quad \begin{cases} B_{(s,t')} - B_{(s,t)} = \int_{[V_{s,t'} - V_{s,t}]} (\hat{D}\partial_2 X + \hat{F}\partial_2 Y) \\ B_{(s',t)} - B_{(s,t)} = \int_{[H_{s',t}-H_{s,t}]} (\hat{E}\partial_1 X + \hat{F}\partial_1 Y). \end{cases}$$

Soit Γ l'ensemble des points (s,t) tels que $(s,t) \in F$, et pour ps (s',t'), $(s',t') \notin F$, $(s',t) \notin F$ et $(s,t') \notin F$. F étant négligeable, $\mathbb{C}^+ \setminus \Gamma$ l'est aussi. En particulier, cela entraîne facilement qu'il existe une suite γ_n de points de Γ, telle que, pour tout n, $\gamma_n > (n,n)$ et que $(A_{\gamma_n}, n \in \mathbb{N})$, et $(B_{\gamma_n}, n \in \mathbb{N})$ soient deux $(\mathcal{F}_{\gamma_n})$ martingales. Les points $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ appartenant à Γ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $U_n \subset R_{\gamma_n}$, et de mesure de Lebesgue pleine dans ce rectangle tel que : $\forall u_n \in U_n$, $A_{u_n} = E[A_{\gamma_n} | \mathcal{F}_{u_n}]$ ps (et de même pour B). Ainsi, en prenant $U = \bigcup_n U_n$, les processus $(A_u, u \in U)$ et $(B_u, u \in U)$ sont deux $\mathcal{F}_u$ martingales de carré intégrable. Soient donc $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$ des versions continues (p.s. et dans L^2) de A et B respectivement. On a donc : $\forall u \in U$, $A_u = (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_u$ et $B_u = (\frac{\partial\Phi}{\partial Y})_u$ ps.

Pour (s,t), (s',t'), (s',t) et (s,t') appartenant à U, avec $s \leq s'$ et $t \leq t'$, remplaçons dans les quatre égalités (jj)$^{(')}$ et (jjj)$^{(')}$ A et B par $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$. Associons χ à $\mathbb{C}^+ \setminus U$ de la même façon que l'on a associé Γ à F.

D'après le théorème de Fubini, ds ps, $(s,t) \in \chi$ dt ps.

Donc, ds ps, il existe une suite $t_n(s) \downarrow 0$, telle que $(s,t_n)(s)) \in \chi$.

Par continuité du processus $\frac{\partial\Phi}{\Phi X}$, on obtient ainsi, en appliquant (jj) : ds ps, dt' ps :

$$\text{(k)} \qquad (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_{s,t'} = (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_o + \int_{V_{s,t}} (\hat{C}\partial_2 X + \hat{E}\partial_2 Y)$$

et, de même, ds' ps, dt ps :

$$\text{(kk)} \qquad (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_{s',t} = (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_o + \int_{H_{s',t}} (\hat{C}\partial_1 X + \hat{D}\partial_1 Y).$$

On obtient des formules analogues pour $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$.

Ainsi le processus $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ admet des dérivées partielles le long de H_z et V_z pour presque tout z. D'après la proposition 3.1, il est donc partiellement différentiable en tout point de $\mathbb{C}^+$, et de plus, sa dérivée partielle par rapport à X le long des horizontales est du ps égale à $\hat{C}_u$ (et de même pour les autres dérivées partielles).

A l'aide de (k), et de la formule de Green, calculons :

$$\int_{H(\sigma,\tau)} \frac{\partial\Phi}{\partial X}\,\partial_1 X + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\,\partial_1 Y = \int_{R_{\sigma,\tau}} (A\ dX+B\ dY)$$

$$\int_{R(\sigma,\tau)} \hat{C}\,d\,J_{X,X} + \hat{E}\,d\,J_{Y,X} + \hat{D}\,dJ_{X,Y} + \hat{F}\,d\,J_{Y,Y}.$$

D'où : $\Phi_{(\sigma,\tau)} = \int_{H_{(\sigma,\tau)}} \frac{\partial\Phi}{\partial X}\,\partial_1 X + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\partial_1 Y.$

A l'aide de (kk), et de la formule de Green, on obtient de même :

$$\Phi_{(\sigma,\tau)} = \int_{V_{(\sigma,\tau)}} \frac{\partial\Phi}{\partial X}\,\partial_2 X + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\,\partial_2 Y.$$

Le processus Φ est donc continument différentiable.

c). D'après (k) et (kk), le processus $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ est lui-même partiellement différentiable, et donc continûment différentiable d'après b). Ceci entraîne donc $\hat{E}_z = \hat{D}_z$ dx dy ps.

De plus, ces processus admettent des modifications continues $\widetilde{E}_z$ et $\widetilde{D}_z$ indistinguables (car ce sont p.s. des dérivées partielles). D'autre part, les formules analogues à (k) et (kk) pour $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$ sont :

(k') $$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_{s,t'} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_o + \int_{V_{s,t'}} (\hat{D}\partial_2 X + \hat{F}\partial_2 Y)$$

(kk') $$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_{s',t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_o + \int_{H_{s',t}} (\hat{E}\partial_1 X + \hat{F}\partial_1 Y).$$

Donc, $\widetilde{D} \equiv \widetilde{E}$ est à la fois la dérivée partielle de $\frac{\partial\Phi}{\partial Y}$ par rapport à X et de $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ par rapport à Y.

On a donc finalement : $\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\Phi\right) = \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right).$

Remarque : D'après cette démonstration, adaptée au cas du processus de Wiener W réel, à deux paramètres, il suffit de supposer qu'un processus soit partiellement différentiable par rapport à W (définition évidente) pour qu'il soit en fait différentiable - un tel processus est appelé processus holomorphe en [1] - et donc indéfiniment différentiable. Ce résultat vient également d'être obtenu par R. Cairoli et J.B. Walsh dans un article à paraître :

"Martingale representations and holomorphic processes"

article dont nous avons eu connaissance après la rédaction du présent travail.

On s'intéresse maintenant au développement en série des processus (partiellement) (et indéfiniment !) différentiables. Tout d'abord, définissons les polynômes de Hermite $(H_{m,n})$ à deux indices(1) par :

$$H_{m,n}(z,u) = H_m(x,u)\, H_n(y,u), \text{ où } z=x+iy,\ u \geqslant 0$$

Théorème 3.4.

Un processus $(\Phi_z,\ z \in \mathbb{C}^+)$ est (partiellement) différentiable par rapport à X et Y si, et seulement si, il existe une suite $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de constantes telles que :

$$(7) \begin{cases} (7.a) & \forall u > 0, \quad \sum_{m,n} |a_{m,n}|^2 \dfrac{u^{m+n}}{m!\,n!} < \infty \\ (7.b) & \Phi_z = \sum_{m,n} a_{m,n} H_{m,n}(Z_z\ ;\ xy) \text{ ps,} \end{cases}$$

la série convergeant uniformément p.s. et dans L^2 sur tout compact de $\mathbb{C}^+$.

Preuve : Soit Φ processus différentiable par rapport à X et Y. On utilise tout d'abord la propriété : Φ est indéfiniment différentiable, tout en ignorant provisoirement la propriété suivante : l'ordre de dérivation par rapport à X et Y n'importe pas.

(1) La définition des polynômes de Hermite à un indice a été rappelée au paragraphe 1.

Notons alors $\mathcal{D}^j$ toutes les dérivations ∂^j possibles d'ordre j par rapport à deux variables (l'ordre de dérivation important).

En dérivant le long de $H_{s,t}$, on a :

$$\Phi_{s,t} = \Phi_o + \int_o^s \{(\frac{\partial\Phi}{\partial X})_{u,t}\ \partial_1 X_{u,t} + (\frac{\partial\Phi}{\partial Y})_{u,t}\ \partial_1 Y_{u,t}\}$$

$$= \Phi_o + (\frac{\partial\Phi}{\partial X})_o\ X_{s,t} + (\frac{\partial\Phi}{\partial Y})_o\ Y_{s,t}$$

$$+ \int_o^s \partial_1 X_{u,t} \int_o^u \left[\frac{\partial}{\partial X}(\frac{\partial}{\partial X}\Phi)_{v,t}\ \partial_1 X_{v,t} + \frac{\partial}{\partial Y}(\frac{\partial}{\partial X}\Phi)_{v,t}\ \partial_1 Y_{v,t}\right]$$

$$+ \int_o^s \partial_1 Y_{u,t} \int_o^u \left[\frac{\partial}{\partial X}(\frac{\partial}{\partial Y}\Phi)_{v,t}\ \partial_1 X_{v,t} + \frac{\partial}{\partial Y}(\frac{\partial}{\partial Y}\Phi)_{v,t}\ \partial_1 Y_{v,t}\right]$$

En itérant, on obtient donc :

$$\Phi_{s,t} = \sum_{j\leq n} \sum_{\partial^j\in\mathcal{D}^j} (\partial^j\Phi)_o \int_o^s \partial_1 U_{s_1,t} \int_o^{s_1} \partial_1 U_{s_2,t} \cdots \int_o^{s_{j-1}} \partial_1 U_{s_j,t} + (R_j)_{s,t}$$

où dans l'intégrale multiple d'ordre j associée a ∂^j figurent U=X (m fois) ou Y (n fois) autant de fois et dans le même ordre que $\frac{\partial}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial y}$ apparaissent dans ∂^j.

De plus, on a :

$$E\left[(R_j)^2_{s,t}\right] = t^{j+1}\ E\left[\int_o^s ds_1 \ldots \int_o^{s_j} ds_{j+1}\{\sum_{\mathcal{D}^{j+1}} (\partial^{j+1}\Phi)^2_{s_{j+1},t}\}\right]$$

Or, $\partial^{j+1}\Phi$ est une martingale, et donc :

$$(\ell)\qquad E\left[(R_j)^2_{s,t}\right] \leq \frac{(st)^{j+1}}{(j+1)!}\ E\left[\sum_{\mathcal{D}^{j+1}} (\partial^{j+1}\Phi)^2_{s,t}\right].$$

En reprenant la démonstration du lemme 9.13 de (1) avec les fonctions

$g_n(s,t) = E\left[\sum_{\mathscr{D}^n} (\partial^n\Phi)^2_{s,t}\right]$, on montre que le membre de droite de (ℓ) converge vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$, et donc $(R_j)_{s,t} \xrightarrow[(j \to \infty)]{} 0$, dans L^2.

Revenant alors au développement de $\Phi_{s,t}$, on a donc :

$$(p) \quad \Phi_{s,t} = \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{\partial^j \in \mathscr{D}^j} (\partial^j\Phi)_o \int_o^s \partial_1 U_{s_1,t} \cdots \int_o^{s_{j-1}} \partial_1 U_{s_j,t} ,$$

la série convergeant dans L^2, et de plus :

$$E\left[(\Phi_{s,t})^2\right] = \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{\partial^j \in \mathscr{D}^j} (\partial^j\Phi)^2_o \frac{(st)^j}{j!} < \infty$$

Rappelons nous maintenant que, pour les dérivées de Φ, l'ordre de dérivation par rapport à X et Y n'importe pas. Donc, en intervertissant l'ordre de sommation de la série de Φ, on a

$$(p') \quad \Phi_{s,t} = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n} (P_{m,n})_{s,t} ,$$

où $$(P_{m,n})_{s,t} = \sum_{\partial^{m+n} \in \mathcal{A}(m,n)} \int_o^s \partial_1 U_{s_1,t} \cdots \int_o^{s_{m+n-1}} \partial_1 U_{s_{m+n},t} ,$$

$\mathcal{A}(m,n) \subset \mathscr{D}^{m+n}$ étant l'ensemble des dérivations d'ordre m en x, n en y (l'ordre important).

On en déduit les relations de récurrence ; pour $m,n \geq 1$,

$$(P_{m,n})_{s,t} = \int_o^s \{\partial_1 X_{s_1,t} (P_{m-1,n})_{s_1,t} + \partial_1 Y_{s,t} (P_{m,n-1})_{s_1,t}\}$$

Ces relations étant vérifiées par les processus $H_{m,n}(Z_{s,t};st)$, et de plus $(P_{1,o})_{s,t} = H_{1,o}(Z_{s,t} ; st) = X_{s,t}$

$$(P_{o,1})_{s,t} = H_{o,1}(Z_{s,t} ; st) = Y_{s,t}$$

on en déduit : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $(P_{m,n})_{s,t} = H_{m,n}(Z_{st} ; st)$. De plus, de l'égalité (p') définissant Φ, il découle :

$$E\left[(\Phi_{s,t})^2\right] = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} (a_{m,n})^2 \frac{(st)^{m+n}}{m!n!} < \infty .$$

Inversement, si une suite $(a_{m,n})$ vérifie la condition $\sum_{m,n} \frac{(a_{m,n})^2}{m!n!} u^{m+n} < \infty$, le processus Φ défini par (p') est différentiable, de dérivées :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \sum_{m,n} a_{m+1,n}\, H_{m,n}(Z_{s,t};st) \;;\; \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \sum_{m,n} a_{m,n+1}\, H_{m,n}(Z_{s,t};st)$$

Enfin, la convergence ps uniformément sur tout compact de la série (p') découle de l'inégalité de Doob-Cairoli sur les martingales de carré intégrables. ∎

Passons maintenant à l'étude des processus holomorphes : on dira que $(\Phi_z, z \in \mathbb{C}^+)$ est (partiellement) holomorphe par rapport à Z s'il existe deux processus $(f_z, z \in \mathbb{C}^+)$ et $(g_z, z \in \mathbb{C}^+)$ tels que :

$$\Phi_z = \Phi_o + \int_{H_z} f_u \partial_1 Z_u = \Phi_o + \int_{V_z} g_u \partial_2 Z_u,$$

où

$$E\int_{H_z} |f_u|^2\, du < \infty \quad \text{et} \quad E\int_{V_z} |g_v|^2\, dv < \infty.$$

On a alors, avec une terminologie évidente, le :

Corollaire 3.5.

Il y a bijection entre l'espace des processus (partiellement) holomorphes et $\mathcal{H} = \{f \text{ entière} \mid f(z) = \sum_{p=o}^{\infty} a_p \frac{z^p}{p!} \;;\; r > 0, \sum |a_p|^2 \frac{r}{p!}$

au moyen de

$$(8) \qquad \Phi_z = f \circ Z_z.$$

Preuve : Φ étant partiellement holomorphe, est partiellement différentiable par rapport à X et Y, et donc différentiable. De plus, pour tout $z=s+it \in \mathbb{C}^+$, on a :

$$i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_{u,t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_{u,t} \; (= i f_{u,t}) \text{ du ps } \quad u \leq s.$$

Les deux premiers processus étant continus sont donc indistinguables.

Utilisons la représentation de Φ à l'aide de la suite $(a_{m,n})$ obtenue au théorème précédent.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = i\,\frac{\partial\Phi}{\partial X} \Longrightarrow i \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m+1,n}\, H_{m,n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n+1}\, H_{m,n}$$

D'où : $\forall m,\ \forall n$: $a_{m,n+1} = i\, a_{m+1,n}$

et donc $a_{m,n} = i^n\, a_{m+n,o}$

En reportant ceci dans le développement en série de Φ, il vient :

$$\Phi_{s,t} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} i^n\, a_{m+n,o}\, H_{m,n}(Z_{s,t};st)$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{p,o}\Big\{\sum_{n\leq p} i^n\, H_{p-n;n}(Z_{s,t}\ ;\ st)\Big\}.$$

Posons $(K_p)(s,t) = \sum_{n\leq p} i^n\, H_{p-n;n}(Z_{s,t};st)$.

On vérifie que les processus K_p sont holomorphes, et satisfont la relation de récurrence

$$K_{p+1}(s,t) = \int_{H_{s,t}} K_p(u,t)\,\partial_1 Z_{u,t}$$

$$= \int_{V_{s,t}} K_p(u,t)\,\partial_2 Z_{u,t}.$$

Or, les processus $\frac{1}{p!}Z^p$ vérifient la même relation ; de plus, $K_o \equiv 1$. On a donc : $\forall p\in\mathbb{N},\ K_p = \frac{1}{p!}Z^p$.

On en déduit finalement $\Phi = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{a_{p,o}}{p!} Z^p = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p \frac{Z^p}{p!}$ $(a_p = a_{p,o})$.

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème précédent. ∎

Remarque : Voici une légère variante de cette démonstration : Ayant remarqué que Φ est (indéfiniment) holomorphe par rapport à Z, on applique la version complexe du théorème 1.1, pour t fixé, à la martingale $(Z_{s,t},\ s\geq 0)$ et au processus $(\Phi_{s,t},\ s\geq 0)$. Il existe donc une suite de constantes

a_p (il est facile de montrer qu'elles ne dépendent pas de t) telle que $\Phi_{s,t} = L^2 \lim\limits_{(p \to \infty)} \sum\limits_{n \leq p} a_n P_s^{(n)}(Z_{\cdot,t})$. Or, on a ici : $P_s^{(n)}(Z_{\cdot,t}) = \frac{Z^n_{s,t}}{n!}$, d'où le résultat.

Les résultats de représentation des processus différentiables et des processus holomorphes entraînent bien entendu de nombreuses conséquences immédiates dûes à la simplicité de ces représentations. En voici quelques unes :

a). Soient deux processus différentiables U et V ; alors, il existe Φ processus différentiable tel que $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = U$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = V$ si, et seulement si : $\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial X}$.

b). A tout processus U différentiable, on peut associer une infinité de processus différentiables V tels que a) soit réalisé, deux tels tels processus V et V' différant d'un processus qui ne dépend que de Y.

c). Les processus différentiables (réels) ne sont pas en général stables par multiplication. En particulier, les seuls processus Φ différentiables, réels, tels que Φ^2 soit aussi différentiable sont les processus constants (car, d'après la formule de Ito $(\frac{\partial \Phi}{\partial X})^2 + (\frac{\partial \Phi}{\partial Y})^2 = 0$). Remarquons que dans le cas du processus de Wiener réel X à deux paramètres, on a de même : si Φ et Ψ sont deux processus différentiables par rapport à X (appelés holomorphes en [1]), alors $\Phi\Psi$ est différentiable si, et seulement si, l'un des deux est constant.

Remarquons ici, au contraire que si Φ et Ψ sont deux processus holomorphes pour Z (sans condition d'intégrabilité), il en est de même pour $\Phi\Psi$.

On en déduit par exemple que :

d). Tout processus R différentiable (par rapport à X et Y), réel, vérifiant $\frac{\partial^2 R}{\partial_X^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial_X^2} = 0$ s'écrit sous la forme $R_z = f(Z_z)$, où f est une fonction harmonique réelle (prendre I différentiable réel tel que R+iI soit holomorphe).

e). Tout processus holomorphe admet une primitive.

Il faut noter que cette propriété e) n'est pas vérifiée pour les processus Φ faiblement holomorphes par rapport à Z, c'est à dire ne vérifiant pas forcément $E\left[|\Phi_z|^2\right] < \infty'$, et tels qu'il existe $(\Psi_z,\ z \in \mathbb{C}^+)$ avec :

$$\forall z \in C^+,\ \Phi_z = \Phi_o + \int_{H_z} \Psi_n \partial_1 Z_u = \Phi_o + \int_{V_z} \Psi_u \partial_2 Z_u.$$

En effet, prenons $\Phi_u = \frac{1}{Z_u - a}$ $(a \neq o)$, processus continu à valeurs dans la sphère de Rieram $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. (On peut si l'on veut pas admettre ∞ pour valeur du processus prendre $\tilde{\Phi}_u = \frac{1}{(Z_u - a)} 1_{(Z_u \neq a)}$; alors, les processus Φ et $\tilde{\Phi}$ sont faiblement holomorphes, de dérivées $-\frac{1}{(Z_u - a)^2}$ (ou : $-\frac{1}{(Z_u - a)^2} 1_{(Z_u \neq a)}$ si l'on refuse ∞).

De plus, $\{a\}$ étant polaire pour $(Z_u,\ u \in H_z)$, les processus $(\Phi_u,\ u \in H_z)$ et $(\tilde{\Phi}_u,\ u \in H_z)$, sont indistinguables, (et de même pour V_z). Ils n'admettent pas de primitive, car on n'a pas: $\int_{H_z} \Phi_u \partial_1 Z_u = \int_{V_z} \Phi_u \partial_2 Z_u$ ps, sinon l'indice de a par rapport à $Z_{H_z - V_z}(\omega)$ serait p.s. nul, en contradiction avec les résultats obtenus en [3] .

Plus généralement, si l'on prend $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C} \setminus E)$, où E est l'ensemble des points singuliers isolés de f, $E \not\ni \{0\}$, alors :

$$\int_{\partial R_z} f(Z_u) dZ_u = \sum_{(a \in E)} I_{\partial R_z}(a) \operatorname{Rés}(f,a)$$

où $\partial R_z = H_z - V_z$ et $I_{\partial R_z}(a)$ est l'indice p.s. défini de a par rapport à $Z_{\partial R_z}(\omega)$, et donc, dans ce cas, le processus $f(Z_u) I_{(Z_u \notin E)}$ n'admet en général pas de primitive. Remarquons donc finalement que l'étude des processus faiblement holomorphes reste un problème ouvert, de même que celle des processus (faiblement) indéfiniment dérivables par rapport à une martingale quelconque (ou même, de processus croissant $\langle M,M\rangle_t = t$).

R E F E R E N C E S

1.- R. CAIROLI, J.B. WALSH : "Stochastic integrals in the Plane", Acta Mathematica, Vol. 134 (1975).

2.- P.A. MEYER : Un cours sur "les intégrales stochastiques" (à paraître au Séminaire de Probabilités X).

3.- M. YOR : "Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens". A paraître.

4.- M. YOR : "Représentation des martingales de carré intégrable relatives aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres". (A paraître au Z.f. Wahr.).

CORRECTIONS TYPOGRAPHIQUES

Représentation intégrale de mesures quasi-invariantes ...

page 3 : dans l'équation de Chapman-Kolmogorov, lire dz au lieu de dy .

page 10 : dans la formule $\log a_{s,t}(f,\omega) =$, remplacer a par s, b par t .

Sur les intégrales stochastiques optionnelles ...

page 3 : dans l'énoncé du lemme fondamental, remplacer $\underset{\sim}{M}$ par $\underset{\sim}{L}$.

page 4 : dernière ligne : lire $-[(H*M)^3,N]$.

Représentation intégrale des martingales ...

page 20 : Proposition 10 : X est quasi-continue à gauche.

page 24 : $U(x_1,\dots,x_{n+1})$ tend vers ∞ ...

Formule de Cauchy ...

page 2 : formule (4) : $\int_s^t$

page 4 : en ii), remplacer chaînes par chemins.

page 15 : quatrième ligne, $\theta_t(\omega)-\theta_o(\omega) = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2}$.

page 17 : formule (12) , en exposant figure $\int_0^t \frac{1}{R^2(s)} ds$.

page 18 : supprimer la barre qui figure dans la première ligne.

page 26 : formule (13) $I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dZ_u}{Z_u - a}$ ps .

page 29 : seconde ligne : le membre de gauche

page 35 : 8 lignes du bas : $\int_I f(Z_z - Z_a)\, d\,{}^aZ_z + (y_o-y_a)\int_I \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_u - Z_a)\, du$.

page 38 : seconde ligne :

lire $< {}^a Z, {}^a Z > = 0$ et $< {}^a \overline{Z}, {}^a Z > = \ldots$

<u>Etude de certains processus différentiables</u> ...

page 13 : 9 lignes du bas : $Q(s,v)$

5 lignes du bas : deux couples mesurables.

dernière ligne :

$$E \int_{H_z} ((p^1)^2 + (q^1)^2(u)\, du < \infty \quad ; \quad E \int_{V_z} ((p^2)^2 + (q^2)^2)(u)\, du < \infty$$

page 15 : formule (jj') : $\displaystyle\int_{\left(H_{(s',t')} - H^1_{(s,t')}\right)} (\hat{C}\, \partial_1 X + \hat{D}\, \partial_1 Y)$.

page 21 : 7 lignes du bas :

$$\forall\, r > 0 \;,\; \Sigma\, |a_p|^2 \frac{r^p}{p!} < \infty \;.$$

page 23 : 5 lignes du bas : $\dfrac{\partial^2 R}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial Y^2} = 0$.