Transformation de Lévy pour le mouvement brownien et relation d'absolue continuité.

Marc Yor
Laboratoire de Probabilités,

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, $(L_t, t \geq 0)$ son temps local en 0, et $\left(M_t = \sup_{s \leq t} B_s, t \geq 0\right)$ le processus des maxima de B.

On note W la loi de $(B_t, t \geq 0)$, considérée comme probabilité sur $\Omega_* \equiv C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de la tribu $\mathcal{F}_\infty \equiv \sigma\{X_s, s \geq 0\}$, le processus $(X_s)_{s \geq 0}$ désignant le processus des coordonnées sur Ω_*. On note également $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, pour tout $t \geq 0$.

Paul Lévy a montré que le processus $(L_t - |B_t|, t \geq 0)$ est également un mouvement brownien réel; le résultat peut s'énoncer, plus complètement, sous la forme d'une égalité en loi entre ~~les~~ deux processus bi-dimensionnels :

$$(1) \qquad (L_t - |B_t|, L_t; t \geq 0) \overset{(loi)}{=} (B_t, M_t; t \geq 0).$$

Récemment, plusieurs auteurs ont cherché à démontrer l'ergodicité de la transformation $T : (B_t, t \geq 0) \longrightarrow (L_t - |B_t|, t \geq 0)$ pour la mesure de Wiener W qui, d'après le résultat de Lévy, est laissée invariante par T. Cette propriété d'ergodicité — qui reste toujours à démontrer (l'article [ ] fait le point actuel sur cette question) — est tout à fait plausible : par exemple, Dubins et Smorodinsky [ ] ont montré que, pour la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, la transformation $\tilde{T}$, analogue discrète de T,

est ergodique.
On peut reformuler cette propriété de façon équivalente en disant que W est un point extrémal dans l'ensemble des probabilités sur Ω_*, laissées invariantes par T.
En fait, en admettant toujours l'ergodicité de T sous W, on peut aller un peu plus loin :
il n'existe pas de probabilité P sur $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

(i) pour tout t, $P|_{\mathcal{F}_t}$ est absolument continue par rapport à $W|_{\mathcal{F}_t}$;

(ii) T préserve P,

autre que W (pour une discussion générale, voir [ ]).

En conséquence, si Q désigne une probabilité sur $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$, différente de W, telle que, pour tout t, $Q|_{\mathcal{F}_t}$ soit équivalente à ~~P~~ $W|_{\mathcal{F}_t}$,

alors, il existe une $(Q, \mathcal{F}_t)$ martingale $(\Delta_t, t \geq 0)$ qui n'est pas identiquement égale à 1, telle que :
pour tout $t \geq 0$, pour toute fonctionnelle F mesurable : $C([0,t], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$,
on ait :

$$(2) \qquad E_Q\left[F(L_s - |X_s|, s \leq t)\right] = E_Q\left[F(X_s, s \leq t)\,\Delta_t\right].$$

L'objet de cette Note est d'expliciter $(\Delta_t, t \geq 0)$ pour un certain nombre d'exemples importants, et de montrer les relations qui existent entre ce calcul explicite et la "formule de balayage" suivante :

(3) si $(m_t, t \geq 0)$ est une martingale locale continue, et si $\sigma_t = \sup_{s \leq t} m_s$, alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de classe C^1, ~~[illegible]~~ le processus $(f(\sigma_t) - (\sigma_t - m_t) f'(\sigma_t), t \geq 0)$ est une martingale locale.

Pour terminer cette introduction, on présente les résultats dans deux cas particuliers importants.

Théorème 1 : Soit $\mu \in \mathbb{R}$, et W^μ la loi du mouvement brownien avec drift constant μ. Alors, si l'on note $\Delta_t^{(\mu)}$ la martingale (Δ_t) qui figure en (2), avec $Q = W^\mu$, on a :

$$(4) \qquad \Delta_t^{(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\mu M_t\right)\right)\left[1 + \exp 2\mu\left(M_t - X_t\right)\right].$$

Théorème 2 : Soit $\mu \in \mathbb{R}$, et $\widetilde{W}^\mu$ la loi du processus solution de l'équation stochastique :

$$Y_t = B_t + \mu \int_0^t \mathrm{sgn}(Y_s)\, ds \quad , \quad t \geq 0.$$

Alors, si l'on note $\left(\widetilde{\Delta}_t^{(\mu)}\right)$ la martingale (Δ_t) qui figure en (2) pour $Q = \widetilde{W}^\mu$, on a :

$$(5) \qquad \widetilde{\Delta}_t^{(\mu)} = \exp\left(-2\mu\left(X_t^+ - \frac{1}{2}L_t\right)\right).$$