1[er] Sept. 1993.

Un essai d'unification des travaux sur Arc sinus ($\sim$ 1988-91) et sur les supremum ($\sim$ 1992-93).

Soit $\{B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(k)}), t \geq 0\}$ mouvement brownien de Walsh à k raies.
Je me propose de reprendre ici la méthode d'"Une extension multidimensionnelle" (Sém. XXIII) pour comparer les lois de :

$$\left\{ \frac{1}{T}\left(A_T^{(1)}, \dots, A_T^{(k)}\right) ; \frac{1}{\sqrt{T}}\left(s_T^{(1)}, \dots, s_T^{(k)}\right) \right\}$$

lorsque T est un temps fixe, ou $T \equiv \tau_1$ est l'inverse du temps local en 0.
(J'ai noté ici :

$$A_t^{(i)} = \int_0^t ds\, 1_{(B_s^{(i)} > 0)} , \quad \text{et} \quad s_t^{(i)} = \sup_{u \leq t} B_u^{(i)}).$$

Pour cela, je vais calculer :

$$E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j \alpha_j^2 \frac{A_T^{(j)}}{L_T^2}\right) \prod_j \left\{ \frac{s_T^{(j)}}{L_T} \leq x_j \right\} \right]$$

lorsque $T \equiv \tau_1$, ou bien : $T \equiv \tilde{T}$, variable exponentielle de paramètre $\left(\frac{1}{2}\right)$, indépendante de $(B_t, t \geq 0)$.

a) Calcul pour $T \equiv \tau_1$. On a alors :

$$(1) \quad E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j \alpha_j^2 A_{\tau_1}^{(j)}\right) \prod_j \left(s_{\tau_1}^{(j)} \leq x_j \right) \right] = \exp\left(-\frac{1}{k}\sum_j \alpha_j \coth(\alpha_j x_j)\right).$$

Dém : Le membre de gauche est égal à :

$$\prod_j E\left[\exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2} A_{\tau_1}^{(j)}\right) 1_{(s_{\tau_1}^{(j)} \leq x_j)} \right]$$

Or, si l'on prend $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$, et tous les x_i égaux à x, on a :

$$\left(E\left[\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}A^{(i)}_{\tau_1}\right)1_{\left(s^{(i)}_{\tau_1}\leq x\right)}\right]\right)^k = E\left[\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\tau_1\right)1_{\left(\sup_{u\leq\tau_1}|B_u|\leq x\right)}\right]$$

$$= \exp\left(-\alpha\coth(\alpha x)\right).$$

La formule (1) découle de ces ~~~~ deux résultats.

b) <u>Calcul pour $T \equiv \tilde{T}$.</u>

Il s'agit de calculer :

$$I_k(\alpha,x) \overset{def}{=} E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j \frac{\alpha_j^2 A^{(j)}_{\tilde{T}}}{L^2_{\tilde{T}}}\right)\Pi_j\left(\frac{s^{(j)}_{\tilde{T}}}{L_{\tilde{T}}}\leq x_j\right)\right]$$

On pose : $H(\ell,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j \frac{\alpha_j^2}{\ell^2}A^{(j)}_t\right)\Pi_j\left(\frac{s^{(j)}_t}{\ell}\leq x_j\right)]$

Il vient : $$I_k(\alpha,x) = \frac{1}{2}E\left[\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t}{2}} H(L_t,t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}E\left[\sum_{\ell>0}\int_{\tau_{\ell-}}^{\tau_\ell} dt\, e^{-t/2} H(\ell;t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}E\left[\sum_{\ell>0} H(\ell;\tau_{\ell-})e^{-\left(\frac{\tau_{\ell-}}{2}\right)}\left\{\sum_j\int n_j(d\varepsilon)\int_0^V dt\, e^{-\frac{t}{2}-\frac{\alpha_j^2 t}{2\ell^2}}1_{\left(s^{(j)}_t\leq x_j\ell\right)}\right\}\right]$$

Posons maintenant : $\varphi(\beta;y) = \int n_j(d\varepsilon)\int_0^V dt\,\exp\left(-\frac{t}{2}(1+\beta^2)\right)1_{\left(s^{(j)}_t\leq y\right)}$

On a alors :

$$I_k(\alpha;x) = \frac{1}{2}E\left[\int_0^\infty d\ell\; H(\ell;\tau_\ell)e^{-\left(\frac{\tau_\ell}{2}\right)}\sum_j\varphi\left(\frac{\alpha_j}{\ell};x_j\ell\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\ell\; E\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\ell^2\tau_1+\sum_j\alpha_j^2A^{(j)}_{\tau_1}\right)}\Pi_j\left(s_{\tau_1}\leq x_j\right)\right]\left(\sum_j\varphi\left(\frac{\alpha_j}{\ell};x_j\ell\right)\right)$$

On a, d'après le calcul effectué en a) :

$$\Phi(\ell,\alpha,x) \overset{def}{=} E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\ell^2\tau_1+\sum_j\alpha_j^2A^{(j)}_{\tau_1}\right)\right)\Pi_j\left(s^{(j)}_{\tau_1}\leq x_j\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{k}\sum_j\alpha_j(\ell)\coth\left(\alpha_j(\ell)x_j\right)\right),\quad \text{avec : } \alpha_j(\ell)=\sqrt{\ell^2+\alpha_j^2}.$$

En conséquence, on a les formules :

(2) $$I_k(\alpha;x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dl\ \Phi(l,\alpha,x)\Big(\sum_j \varphi\big(\tfrac{\alpha_j}{l},x_j l\big)\Big)$$

(3) $$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dl\Big(\sum_j \varphi\big(\tfrac{\alpha_j}{l},x_j l\big)\Big)\exp\Big(-\frac{1}{k}\sum_j \alpha_j(l)\coth\big(\alpha_j(l)x_j\big)\Big).$$