Juin 1983

Un théorème de Girsanov inhabituel

M. Yor

1. Soit $(B_t, t\in[0,1])$ mouvement Brownien réel, issu de 0, et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne uniformément bornée. Zvonkin [10] a démontré que les filtrations de $(B_t ; t\in[0,1])$ et $\left(B^h_t \overset{def}{=} B_t - \int_0^t h(B_s)ds ; t\in[0,1]\right)$ coïncident, aux ensembles négligeables près.

Tsirel'son [6] a ensuite remarqué que cette propriété n'était pas nécessairement satisfaite lorsque l'on remplace $\{h(B_s)\}$ par $\{h(s,\omega)\}$, processus borné, adapté à la filtration de (B_t).

Dans le même ordre d'idées, on montre ici que la filtration naturelle de $\left(\hat{B}_t \overset{déf}{=} B_t - \int_0^t \frac{ds}{B_s}\right)$ est strictement contenue dans celle de (B_t).

On note (symboliquement) $\int_0^t \frac{ds}{B_s}$ pour v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{a} l^a_t$, où (l^a_t) désigne la famille des temps locaux Browniens. L'existence de cette valeur principale a été remarquée par Itô-Mc Kean ([4], p. 72) puis considérée par Fukushima [3], Yamada [7], Yor [9], Yoeurp [8], dans des questions de calcul stochastique.

2. Pour fixer les idées, soit $\mathbb{P}$ la mesure de Wiener sur $C([0,1];\mathbb{R})$, où l'on note $B_t(\omega)\equiv\omega(t)$, et $\mathbb{P}(B_0=0)=1$.

P.A. Meyer [5] a étudié quelques propriétés remarquables de la mesure signée

(1) $P = B_1\cdot\mathbb{P}$. Les remarques qui suivent ont pour origine une conversation avec Meyer au Colloque Schwartz (Fin Mai 1983).

(2.1) Remarquons tout d'abord que, B et $-B$ ayant même loi, on a : $\mathbb{E}(B_1 \mid |B_s| ; s\le 1) = 0$, et donc :

(2) $$P\big|_{\sigma\{|B_s| ; s\le 1\}} = 0.$$

Cette propriété, bien qu'immédiate, est néanmoins assez "spectaculaire";

nous verrons d'autres propriétés semblables par la suite.

(2.2) Lorsque l'on considère, au lieu de la mesure $\mathbb{P}$ définie par (1), une probabilité Q définie par : $Q = M_1 \cdot \mathbb{P}$, avec M_1, valeur en $t=1$ d'une $\mathbb{P}$-martingale (M_t) strictement positive, valant 1 en $t=0$, le théorème de Girsanov affirme que :

$B_t - \int_0^t \frac{d\langle M, B\rangle_s}{M_s}$ est un Q-mouvement Brownien. Par analogie, on pense donc, dans le cas de $\mathbb{P}$, à l'assertion : "$(\hat{B}_t)$ est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien", ce qui signifie : "pour $\mathbb{P}$, les marginales de rang fini de $(\hat{B}_t)$ sont celles du mouvement Brownien". Il n'en est pas ainsi, mais on a tout de même le

Lemme 1 : $\hat{B}_t B_t$ et $[(\hat{B}_t)^2 - t] B_t$ sont deux $\mathbb{P}$-martingales.

Démonstration : Nous ne la ferons que pour $(\hat{B}_t B_t)$. Si X et Y sont deux processus, on note $X \equiv Y$ si $(X_t - Y_t)$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Il s'agit donc de montrer : (3) $\left(\int_0^t \frac{ds}{B_s}\right) B_t \equiv t$.

Or, d'après Yamada [7], ou Yor [9], on a : $0 = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\sup_{t \leq 1} \left(\int_0^t \frac{ds}{B_s} - \int_0^t \frac{ds\, 1_{(|B_s| \geq \varepsilon)}}{B_s}\right)^2\right]$

Par passage à la limite, on montre alors facilement :

$$\left(\int_0^t \frac{ds}{B_s}\right) B_t = \int_0^t dB_s \left(\int_0^s \frac{du}{B_u}\right) + t, \quad \text{d'où (3)} \ \square$$

On aimerait alors pouvoir conclure, à l'aide d'une extension adéquate de la caractérisation de P. Lévy du mouvement Brownien, que $(\hat{B}_t)$ est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien. En fait, on a le

<u>Théorème 1</u> : $$\mathbb{P}\Big|_{\sigma\{\hat{B}_s\,;\, s \leq 1\}} = 0,$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{E}(B_1 \mid \sigma\{\hat{B}_s ; s \leq 1\}) = 0$.

On a, en particulier : $\sigma\{\hat{B}_s ; s \leq 1\} \subsetneq \sigma\{B_s ; s \leq 1\}$.

Démonstration : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction constante par morceaux, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Nous allons montrer :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\int_0^1 f(s)\,d\hat{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(s)\,ds\right\}\cdot B_1\right) = 0,$$

ce qui équivaut aux assertions annoncées.

Notons : $U_t = \exp\left\{i\int_0^t f(s)\,d\hat{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds\right\}$.

On a, en utilisant l'extension du calcul d'Itô aux processus de Dirichlet (Föllmer [1]; [2]) : $dU_s = U_s\, i f(s)\, d\hat{B}_s$,

et donc :

$$U_t B_t = \int_0^t U_s\,dB_s + \int_0^t B_s\,dU_s + \langle B, U\rangle_t$$

$$\equiv \int_0^t \left(-B_s U_s\ i f(s)\frac{ds}{B_s} + U_s\ i f(s)\,ds\right) \equiv 0.$$

On en déduit : $\mathbb{E}(U_1 B_1) = \mathbb{E}(B_0) = 0$.

(2.3) Dans le cas où l'on remplace $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}_a$, la distribution du mouvement Brownien issu de a $(\in \mathbb{R})$, on a, en notant $P_a = B_1 \cdot \mathbb{P}_a$, avec la même méthode que précédemment :

$$P_a(\hat{B} \in \Gamma) = a\ \mathbb{P}_a(\Gamma)$$

pour tout ensemble mesurable Γ de $C([0,1];\mathbb{R})$. En particulier, lorsque $a = 1$, $\hat{B}$ est, sous P_1, un mouvement Brownien réel issu de 1.

3. Revenons à $P \equiv P_0$. Après avoir étudié (cf: théorème 1) l'image du mouvement Brownien par la "transformation de Girsanov" associée au couple $(P, \mathbb{P})$, on se propose d'étudier cette transformation elle-même, c'est à dire ce que deviennent les $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ martingales, en général sous la mesure P.

Notons $\pi = |P| = |B_1|\cdot\mathbb{P}$. On a tout d'abord le

<u>Lemme 2</u> : <u>Si $(M_t, t \le 1)$ est une $\mathbb{P}$-martingale de carré intégrable, on a</u> :

$$\sup_{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1} \sum \pi\left(\left|E_P\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)\right|\right) \le \mathbb{E}\left(\int_0^1 |d\langle M, B\rangle_s|\right)$$

(on peut ainsi dire que M est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ quasi-martingale)

Démonstration : On a : $E_P(f_s\,; M_t - M_s) = \mathbb{E}(f_s\,; \langle M,B\rangle_t - \langle M,B\rangle_s)$ pour tous $s<t$, et toute variable f_s $\mathcal{F}_s$-mesurable, avec $|f_s| \leq 1$.
On en déduit aisément :

$$\Pi\left(\left|E_P(M_t - M_s|\mathcal{F}_s)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(|\langle M,B\rangle_t - \langle M,B\rangle_s|\right)$$

d'où le résultat annoncé $\square$

Compte tenu du lemme 2, l'énoncé suivant peut sembler assez paradoxal.

Lemme 3 : Soit $(M_t\,;\, t \leq 1)$ une $\mathbb{P}$-martingale de carré intégrable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (M_t) peut s'écrire sous la forme : $M_t = \tilde{M}_t + V_t$, avec $(\tilde{M}_t)$ P martingale locale, et (V_t) processus $(\mathcal{F}_t)$ adapté, $\mathbb{P}$ p.s. (ou Π p.s.) à variation finie.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|d\langle M,B\rangle_s|}{|B_s|} < \infty$, $\mathbb{P}$ p.s.

Si l'une ou l'autre de ces conditions est satisfaite, le processus (V_t) figurant en (i) est alors donné par la formule :

$$V_t = \int_0^t \frac{d\langle M,B\rangle_s}{B_s} + \gamma_t\,,$$

où (γ_t) est un processus $(\mathcal{F}_t)$ adapté à variation bornée, tel que $d\gamma_s$ soit portée par $(s : B_s = 0)$.

Remarque : Si $M_t = \int_0^t \varphi(B_s)\,dB_s$, avec φ localement bornée, la condition (ii) équivaut à : $\displaystyle\int_{-1}^1 da\,\frac{|\varphi(a)|}{|a|} < \infty$.

Démonstration du lemme 3 : (i) équivaut à : $(M_t - V_t)B_t \equiv 0$ $(\mathbb{P})$.
Or, on a : $(M_t - V_t)B_t \equiv \langle M,B\rangle_t - \int_0^t B_s\,dV_s$,
et donc, si (i) est satisfaite, on a :
$\langle M,B\rangle_t = \int_0^t dV_s \cdot B_s$, d'où : $1_{(B_s \neq 0)}|dV_s| = \frac{1}{|B_s|}|d\langle M,B\rangle_s|$,
ce qui implique (ii). Le reste de la démonstration est immédiat $\square$

Même si la condition (ii) ci-dessus n'est pas satisfaite, on peut énoncer le

Lemme 4 : Soit $(M_t;\ t\leq 1)$ une martingale de carré intégrable. Si la suite de processus $\left(V_t^{(n)} = \int_0^t 1_{(|B_s|\geq 1/n)} \frac{d\langle M,B\rangle_s}{B_s}\ ;\ t\leq 1\right)$

converge en probabilité, uniformément pour $t\in[0,1]$, vers un processus (V_t), alors $(M_t - V_t)$ est une P martingale locale.

Démonstration : L'égalité :

$$V_t^{(n)} B_t = \int_0^t V_s^{(n)} dB_s + \int_0^t 1_{(|B_s|\geq \frac{1}{n})}\, d\langle M,B\rangle_s$$

devient, sous l'hypothèse du lemme, lorsque l'on fait tendre n vers ∞ :

$$V_t B_t = \int_0^t V_s dB_s + \langle M,B\rangle_t, \quad \text{et donc : } (M_t - V_t)B_t \equiv 0 \ (\mathbb{P}),$$

d'où le résultat annoncé $\square$

L'hypothèse faite dans l'énoncé du lemme 4 n'est pas vérifiée pour $M_t = \int_0^t \varphi(B_s)\,dB_s$, lorsque $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, bornée, satisfait :

(H) $\quad\varphi(0+)$, $\varphi(0-)$ existent, mais $\varphi(0+)\neq\varphi(0-)$.

En effet, la convergence, lorsque $n\to\infty$, de

$$V_t^{(n)} = \int_{1/n}^{\infty} \frac{da}{a}\left[\varphi(a)\,\ell_t^a - \varphi(-a)\,\ell_t^{-a}\right]$$

équivaut, en vertu du caractère höldérien de : $a \longrightarrow \ell_t^a$ en $a=0$, à la convergence de : $\ell_t^0 \cdot \int_{1/n}^1 \frac{da}{a}\left[\varphi(a)-\varphi(-a)\right]$,

lorsque $(n\to\infty)$. Or, sous l'hypothèse (H), l'intégrale ci-dessus diverge en 0.

La proposition suivante montre que, pour $M_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s$, où (φ_t) est une $\mathbb{P}$-semimartingale continue, l'hypothèse faite dans le lemme 4 est satisfaite.

Proposition : Soit (φ_t) une $\mathbb{P}$-semimartingale continue, et (ℓ_t^a) la famille des temps locaux browniens, choisie conjointement continue en (a,t).

Alors, 1) il existe une version de l'application :
$(a,t) \longrightarrow \int_0^t \varphi_s \, d\ell_s^a$ qui est conjointement continue en (a,t), et höldérienne d'ordre $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ en a, uniformément pour $t \in [0,1]$.

2) La suite des processus $\left(V_t^{(n)} = \int_0^t 1_{(|B_s| \geq \frac{1}{n})} \frac{\varphi_s \, ds}{B_s} ; t \leq 1 \right)$

converge en probabilité, uniformément pour $t \in [0,1]$, vers :

$$V_t = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a} \left(\int_0^s \varphi_s \, d\ell_s^a \right).$$

Remarque : La condition : φ semimartingale n'est pas nécessaire pour que l'hypothèse du lemme 4 soit satisfaite pour $M_t^\varphi = \int_0^t \varphi_s \, dB_s$; en effet, $\varphi_s = |B_s|^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ n'est pas une semimartingale, mais l'hypothèse du lemme 4 est, à l'évidence, satisfaite.

Démonstration de la proposition : On a tout d'abord, par intégration par parties :

$$\int_0^t \varphi_s \, d\ell_s^a = \ell_t^a \varphi_t - \int_0^t \ell_s^a \, d\varphi_s ,$$

et il reste à montrer l'existence d'une bonne version de : $\Lambda_t^a = \int_0^t \ell_s^a \, d\varphi_s$.

Or, si $\varphi_t = N_t + V_t$ est la décomposition canonique de la semimartingale (φ_t) en somme d'une martingale locale (N_t), et d'un processus à variation bornée (V_t), on a, pour tout $k>0$:

$$E\left[\sup_{t \leq 1} \left| \int_0^t (\ell_s^a - \ell_s^b) \, d\varphi_s \right|^k \right]$$

$$\leq c_k \, E\left[\left(\int_0^1 (\ell_s^a - \ell_s^b)^2 \, d\langle N \rangle_s \right)^{k/2} + \left(\int_0^1 |\ell_s^a - \ell_s^b| \, |dV_s| \right)^k \right]$$

$$\leq c_k \, E\left[\sup_{t \leq 1} |\ell_t^a - \ell_t^b|^k \left\{ \langle N \rangle_1^{k/2} + \left(\int_0^1 |dV_s| \right)^k \right\} \right]$$

$$\leq C_{k,p} \, |a-b|^k \, \| \langle N \rangle_1^{k/2} + \left(\int_0^1 |dV_s| \right)^k \|_p \quad \text{pour tout } p > 1.$$

La démonstration est alors terminée, après localisation si nécessaire, par application du lemme de Kolmogorov □

Références :

[1] H. Föllmer : Dirichlet processes. In : "Stochastic Integrals", ed : D. Williams. Lect. Notes in Maths 851. Springer (1981).

[2] H. Föllmer : Calcul d'Itô sans probabilité. Sém. Probas XV. Lect. Notes in Maths 850. Springer (1981)

[3] M. Fukushima : A decomposition of additive functionals of finite energy. Nagoya Math. J., 74, 137-168, 1979.

[4] K. Itô - H.P. Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[5] P.A. Meyer : Communication personnelle.

[6] B.S. Tsirel'son :

[7] ~~A. Zvonkin~~ T. Yamada : On some representations concerning stochastic integrals. Preprint (1981).

[8] Ch. Yoeurp : Une décomposition multiplicative de la valeur absolue d'un mouvement Brownien. Sém. Probas XVI. Lect. Notes in Maths 920. Springer (1982).

[9] M. Yor : Sur la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens, et une extension de la formule d'Itô. Sém. Probas. XVI. Lect. Notes in Maths 920. Springer (1982).

[10] A. Zvonkin :