Un exemple d'équation stochastique sans solution forte.

Th. Jeulin et M. Yor

Soit $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne telle que :

$$(1) \quad \text{pour tous } 0 < \varepsilon < N < \infty, \quad \int_\varepsilon^N du\, |\varphi(u)| < \infty.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré usuel et $(\beta_t, t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0. On se propose de déterminer si l'équation :

$$(2) \qquad X_t = \beta_t + \int_0^t du\, \varphi(u) X_u \qquad (t \geq 0)$$

admet une solution forte, cette expression signifiant ici que : il existe un processus (X_t) $(\mathcal{F}_t)$ adapté qui satisfasse (2) et qui soit une $(\mathcal{F}_t)$ semi-martingale, ce qui équivaut à :

$$(3) \quad \text{pour tout } t > 0, \int_0^t du\, |\varphi(u)|\, |X_u| < \infty \qquad P \text{ p.s.}$$

1. Le cas le plus simple est celui où, pour tout $N > 0$, $\int_0^N du\, |\varphi(u)| < \infty$. On montre alors, sans difficulté, à l'aide de la méthode de variations des constantes que l'équation (2) admet une unique solution forte qui est donnée par la formule :

$$X_t = \exp\left(\int_0^t ds\, \varphi(s)\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^u ds\, \varphi(s)\right) d\beta_u$$
$$= \int_0^t d\beta_u \left(\exp \int_u^t ds\, \varphi(s)\right).$$

2. Sous la seule hypothèse (1), nous résolvons maintenant en toute généralité le problème posé au début de cette Note.

Théorème : Soit $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne qui satisfait l'hypothèse (1).

Alors, l'équation (2) admet une solution forte si, et seulement si :

$$(4) \quad \text{~~pour tout t > 0~~} \quad \int_0^1 du\, |\varphi(u)| \left(\int_0^u dh \exp 2 \int_h^u ds\, \varphi(s) \right)^{1/2} < \infty .$$

Si cette condition (4) est réalisée, l'équation (2) admet une unique solution forte qui est :

$$(5) \quad X_t = \int_0^t d\beta_u \left(\exp \int_u^t ds\, \varphi(s) \right).$$

Démonstration : (i) Montrons tout d'abord que la condition (4) est nécessaire.

Si (X_t) est solution forte de (2), on a, pour $0 < \varepsilon < t$:

$$X_t = X_\varepsilon + \beta_t - \beta_\varepsilon + \int_\varepsilon^t du\, \varphi(u) X_u$$

On obtient, à l'aide de la méthode de variation des constantes :

$$X_t = \exp\left(\int_\varepsilon^t du\, \varphi(u) \right) X_\varepsilon + \int_\varepsilon^t d\beta_u \exp \int_u^t ds\, \varphi(s)$$

$$(6) \quad = \tilde{X}_\varepsilon + \int_\varepsilon^t d\beta_u \exp \int_u^t ds\, \varphi(s) , \quad \text{où } \tilde{X}_\varepsilon = \exp\left(\int_\varepsilon^t du\, \varphi(u) \right) . X_\varepsilon$$

Nous en déduisons maintenant que, nécessairement, la condition :

$$(7) \quad \int_0^1 du \exp 2 \int_u^1 ds\, \varphi(s) < \infty$$

moins restrictive a priori que (4), est satisfaite.

En effet, d'après (6), et l'hypothèse : X solution forte, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E\left[\exp(i\lambda X_t)\right] = E\left[\exp(i\lambda \tilde{X}_\varepsilon)\right] \exp - \frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^t du \exp\left(2\int_u^t ds\, \varphi(s)\right).$$

D'où, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\left| E\left[\exp(i\lambda X_t)\right]\right| \leq \exp - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t du \exp\left(2\int_u^t ds\, \varphi(s)\right).$$

Si la condition (7) n'était pas satisfaite, on aurait donc :

$$\text{pour tout } \lambda \neq 0, \qquad E\left[\exp i\lambda X_t\right] = 0,$$

ce qui est incompatible avec la continuité en $\lambda = 0$ de la fonction caractéristique de la variable X_t.

La condition (7) étant maintenant supposée satisfaite, on en déduit la convergence de $\int_\varepsilon^t d\beta_u \exp\int_u^t ds\, \varphi(s)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et donc, d'après (6), la convergence de $\tilde{X}_\varepsilon$ vers $\tilde{X}_0$ qui, toujours d'après (6), est donc égal à $X_0 = 0$.

La solution forte, si elle existe, est donc donnée par la formule :

$$(5) \qquad X_t = \int_0^t d\beta_u \exp\int_u^t ds\, \varphi(s)$$

Ainsi, $(X_t, t \geq 0)$ est une semi-martingale gaussienne, et donc une quasi-martingale sur tout intervalle $[0,t]$ (voir, par exemple, Emery [ ])

La condition (3) se renforce alors en :

$$(3') \qquad \text{pour tout } t > 0, \qquad \int_0^t du\, |\varphi(u)|\, E(|X_u|) < \infty,$$

ce qui ~~est~~ d'après la formule (5), donne la condition (4).

(ii) Inversement, supposons la condition (4) satisfaite et montrons que le processus

$$(5) \qquad X_t = \int_0^t d\beta_u \exp \int_u^t ds\, \varphi(s)$$

est une (et donc la) solution forte de (2).

En développant : $\exp \int_u^t ds\, \varphi(s) = 1 + \int_u^t ds\, \varphi(s) \exp \int_u^s dh\, \varphi(h)$

et en intervertissant l'intégrale en ds et l'intégrale en $d\beta_u$, grâce à la condition (4), on obtient bien que (X_t) satisfait (2).

<u>Remarque</u> : Pour tout processus gaussien centré $(X_t, t \geq 0)$, les conditions (3) et (3') sont équivalentes ; il suffit, pour voir cela, d'utiliser une forme affaiblie d'un lemme dû à Jeulin [ ], p.44, en utilisant le fait que, pour tout u, $X_u / E(|X_u|)$ admet une loi qui ne dépend pas de u, en l'occurrence la loi gaussienne centrée réduite. Ce lemme a déjà été utilisé par Pitman-Yor ([ ], [ ]) pour caractériser la convergence de certaines intégrales associées au mouvement brownien ou aux processus de Bessel.

3. Le cas où $\varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ $(u > 0)$ est particulièrement intéressant. Dans ce cas, l'équation (2) n'admet pas de solution forte : en effet, la condition (7), et, a fortiori, la condition (4) ne sont pas satisfaites. Cependant, l'équation (2) admet au moins, dans ce cas, une solution en loi.

On montre l'existence d'une telle solution en considérant $(B_t, t \geq 0)$, mouvement brownien réel issu de 0 dans sa filtration propre grossie de la variable B_1.

Il est alors bien connu (voir, par exemple, [ ]) qu'il existe $(\gamma_t, t \geq 0)$ mouvement brownien relativement à la filtration grossie tel que :

$$B_t = \gamma_t + \int_0^{t\wedge 1} ds \, \frac{B_1 - B_s}{1-s}$$

Ensuite, si l'on pose $X_t = B_1 - B_{1-t}$ et $\beta_t = \gamma_1 - \gamma_{1-t}$ $(t \leq 1)$, on obtient :

$$X_t = \beta_t + \int_0^t ds \, \frac{X_s}{s} \qquad (t \leq 1)$$

Or, le processus $(X_t, t \leq 1)$ n'est pas adapté à la filtration de β, car $X_1 = B_1$ est indépendant de $\sigma\{\beta_s, s \leq 1\} \equiv \sigma\{\gamma_s, s \leq 1\}$.

Compte-tenu de la définition que nous avons adoptée dans cette Note pour la notion de solution forte, une autre façon naturelle d'étudier cet exemple consiste à remarquer que (β_t) est adapté à la filtration naturelle du processus X, soit $(\mathcal{F}_t, t \leq 1)$, mais n'est pas un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien.