Un processus qui ressemble au pont brownien.

1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, nul en 0. On note $(\ell_t, t \geq 0)$ son temps local en 0, et $\tau_t = \inf\{u : \ell_u > t\}$.
Le processus $\left(X_u \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1} ; u \leq 1\right)$ est nul en 0 et en 1, et la normalisation ainsi effectuée sur le mouvement brownien suggère que X a pour variation quadratique u. Il est alors naturel de chercher à comparer ce processus et le pont brownien $(p(u), u \leq 1)$.
On a le

Théorème 1 : Désignons par λ le temps local de p, au niveau 0, et à l'instant 1. Alors, pour toute fonctionnelle $F : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$(1.a) \qquad E\left[F(X_u ; u \leq 1)\right] = E\left[F(p(u), u \leq 1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda}\right]$$

2. Avant de démontrer ce théorème, citons d'autres exemples interessants de "renormalisation" du mouvement brownien, ou de processus de Bessel, qui nous permettront, par la suite, de compléter le théorème 1.

(2.1) Il est bien connu que, si $g_1 = \sup\{s < 1 : B_s = 0\}$, alors $\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{ug_1} ; u \leq 1\right)$ est un pont Brownien qui est, en outre, indépendant de g_1.

(2.2) Chung [2] a défini le méandre brownien

$$\left(m(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-g_1}} \left|B_{g_1 + u(1-g_1)}\right| ; u \leq 1\right).$$

On a le

Théorème 2 ([1]) :

Pour toute fonctionnelle $F : C([0,1]; \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$E\left[F(m(u); u \leq 1) \right] = E\left[F(R_u; u \leq 1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R_1} \right]$$

où $(R_u, u \leq 1)$ désigne le processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

(2.3) Considérons maintenant $(R_t, t \geq 0)$ processus de Bessel de dimension $d \equiv 2(\nu+1) > 2$ (ou, ce qui est équivalent, d'indice $\nu > 0$), et $L = \sup\{t : R_t = 1\}$

On a alors le

Théorème 3 : Pour toute fonctionnelle $F : C([0,1], \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{L}} R_{uL} ; u \leq 1 \right) \right] = E\left[F(R_u ; u \leq 1) \frac{2\nu}{R_1^2} \right]$$

Démonstration : L'identité découle de ce que :

- d'une part, le processus $(R_u, u \leq t)$, conditionnellement à $L = t$, a même loi que $(R_u, u \leq t)$, conditionnellement à $R_t = 1$;
- d'autre part, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$E\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{L}} \right) \right] = E\left[f(R_1) \frac{2\nu}{R_1^2} \right]$$

Cette identité découle de ce que, d'après Getoor [ ] (voir aussi Pitman-Yor [ ]) on a :

$$P(L \in dt) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu)\, t^{\nu+1}} e^{-1/2t}\, dt$$

alors que :

$$P(R_1 \in dx) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} x^{2\nu+1} e^{-x^2/2}\, dx .$$

Corollaire 4 : Soit $T = \inf\{t : B_t = 1\}$.
Pour toute fonctionnelle $F : C([0,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{T}}(1-B_{uT}); u \leq 1\right)\right] = E\left[F(R_{1-u}; u\leq 1)\frac{1}{2R_1^2}\right]$$

où $(R_u, u \leq 1)$ désigne ici un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.
Démonstration : Elle découle du théorème 3, et du théorème de retournement de Williams [ ] selon lequel : $(B_u, u\leq T) \overset{(d)}{=} (1-R_{L-u}; u \leq L)$.

3. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

(3.1) En [1] (théorème (6.1)), les auteurs donnent un résumé des principales formules de la théorie des excursions browniennes. En particulier, les identités suivantes ont lieu, entre mesures σ-finies sur l'espace W des fonctions continues ω définies sur un intervalle $[0, \zeta(\omega)] \subset [0,\infty]$:

$$(3.a) \qquad \int_0^\infty ds\, P^{\tau_s} = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\, Q^u$$

où P^{τ_s} désigne la loi du mouvement brownien issu de 0, et arrêté en τ_s ;
Q^u désigne la loi du pont brownien de longueur u ;

$$(3.b) \qquad \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\, R^u = \int_0^\infty da\, S^{L_a}$$

où R^u désigne la loi du méandre brownien de longueur u ;
S^{L_a} désigne la loi du processus de Bessel de dimension 3, arrêté

à son dernier temps de passage en a.

(3.2) Les théorèmes 1 et 2 découlent respectivement de (3.a) et (3.b). La démonstration du théorème 2 à partir de (3.b) étant faite en [1], montrons comment le théorème 1 découle de (3.a).
D'après (3.a), on a, pour toute fonctionnelle $F : C([0,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, et toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne :

$$\int_0^\infty ds\ E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_s}} B_{u\tau_s} ; u \le 1\right) h(\tau_s)\right] = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\ h(u)\, E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\, p(vu) ; v \le\right.\right.$$

ce qui équivaut, par scaling, à :

$$\int_0^\infty ds\ E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1} ; u \le 1\right) h(s^2\tau_1)\right] = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\ h(u)\, E\left[F(p(v) ; v \le 1)\right]$$

En faisant le changement de variables $t = s^2 \cdot \tau_1$ dans le membre de gauche, il vient

$$(3.c) \qquad E\left[\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\ F\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1} ; u \le 1\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ E\left[F(p(v) ; v \le 1)\right]$$

Cette identité équivaut à (1.a), une fois remarqué le fait que le temps local de $\left(X_u \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1} ; u \le 1\right)$ au niveau 0, et au temps 1, est $\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}$.

4. Quelques remarques relatives au théorème 1.

(4.1) Notons λ le temps local au niveau 0, et au temps 1, du pont brownien.
Remarquons que le temps local de $\left(X_u \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1}\, ;\, u \leq 1\right)$ au niveau 0 et au temps 1 est $\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}$.

On a donc, d'après la formule (1.a), ou mieux (3.e) :
pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$(4.a) \qquad E[f(\lambda)] = E\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\tau_1}}\, f\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right)\right]$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \overset{(d)}{=} |N|$, où N désigne une variable gaussienne, réelle, centrée, réduite. On déduit alors de (4.a) que:

$$(4.b) \qquad \lambda \overset{(d)}{=} |Z_1| \overset{(d)}{=} \sqrt{2\mathbb{e}}\,,$$

où Z_1 désigne la valeur au temps 1 du mouvement brownien complexe issu de 0, et $\mathbb{e}$ une variable exponentielle de paramètre 1.
L'identité en loi (4.b) peut bien sûr être déduite directement de la connaissance de la loi conjointe de $(B_1 ; \ell_1)$ ou bien encore du résultat (2.1) qui entraîne : $\ell_1 \overset{(d)}{=} \sqrt{g}\cdot\lambda$
avec g et λ indépendantes. Or, on sait par ailleurs que:

$$\ell_1 \overset{(d)}{=} |N| \overset{(d)}{=} \sqrt{g\cdot(2\mathbb{e})}\,,$$

avec g et $\mathbb{e}$ indépendantes, et $\mathbb{e}$ variable exponentielle de paramètre 1.

(4.2) Inversement, ayant remarqué l'identité en loi (4.b), dont (4.a) découle, on peut donner une démonstration plus intuitive du théorème 1, que celle, rigoureuse, mais un peu formelle, donnée en (3.2).
En effet, il suffit alors de montrer que :

$$\left(\left(\frac{1}{a} B_{ua^2} \,;\, u \leq 1\right) \,\middle|\, \tau_1 = a^2\right) \overset{(d)}{=} \left((p(u),\, u \leq 1) \,\middle|\, \lambda = \frac{1}{a}\right),$$

ce qui équivaut, par scaling d'une part, et par définition de p d'autre part, à :

$$\left((B_u,\, u \leq 1) \,\middle|\, \tau_x = 1\right) \overset{(d)}{=} \left((B_u,\, u \leq 1) \,\middle|\, B_1 = 0;\, \ell_1 = x\right)$$

où l'on a posé $x = 1/a$.
Or, conditionner par $(\tau_x = 1)$ revient à conditionner par $B_1 = 0$ et $\ell_1 = x$.

(4.3) Pour compléter la description de X, donnons sa représentation comme semimartingale, précisément : X est la somme d'un mouvement brownien, et d'un processus à variation bornée.
En effet, lorsque l'on fait le grossissement initial de la filtration du mouvement brownien B avec la variable τ_1, on obtient (cf : [ ], Récapitulatif, par ex.) dans la filtration ainsi grossie :

$$(4.c) \quad B_t = \beta_t + \int_0^{t \wedge \tau_1} ds \, \mathrm{sgn}(B_s) \left\{ \frac{1}{1 - \ell_s + |B_s|} - \frac{1 - \ell_s + |B_s|}{\tau_1 - s} \right\}$$

avec $(\beta_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien indépendant de τ_1.
On en déduit, par scaling de rapport τ_1 :

$$(4.d) \quad X_t = \hat{\beta}_t + \int_0^t ds \, \mathrm{sgn}(X_s) \left\{ \frac{1}{L_1 - L_s + |X_s|} - \frac{L_1 - L_s + |X_s|}{1 - s} \right\}$$

où l'on a noté : $L_u = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \ell_{u\tau_1}$ $(u \leq 1)$ le temps local en 0 de $(X_u, u \leq 1)$,

* $\left(\hat{\beta}_t = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\beta_{t\tau_1} ; t \leq 1\right)$ un nouveau mouvement brownien.

Remarquons encore, à l'aide de l'identité en loi due à P. Lévy :

$$\left(|B_t|, \ell_t ; t \geq 0\right) \overset{(d)}{=} \left(S_t - B_t, S_t ; t \geq 0\right), \quad \text{où } S_t = \sup_{s \leq t} B_s,$$

que, lorsque l'on fait le grossissement initial de la filtration de B avec la variable $T \equiv \inf\{t : B_t = 1\}$, on obtient, d'après la formule (4.c) :

$$(4.e) \qquad B_t = \beta_t - \int^{t\wedge T} ds \left\{ \frac{1}{1-B_s} - \frac{1-B_s}{T-s} \right\}$$

(cf : Jeulin [ ], p. 53, et [ ], Récapitulatif, p. 306).

5. Application aux temps locaux du pont brownien.

Remarquons que si $(\ell^a_t ; a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ désigne la famille des temps locaux du mouvement Brownien B, alors $\left(L^a \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \ell^{a\sqrt{\tau_1}}_{\tau_1} ; a \in \mathbb{R}\right)$ est la famille des densités d'occupation du processus

$$\left(X_u \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} B_{u\tau_1} ; u \leq 1\right) \quad , \text{ c'est à dire :}$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$\int_0^1 du\, f(X_u) = \int da\, f(a) L^a .$$

D'autre part, d'après le théorème de Ray-Knight sur les temps locaux browniens, $\left(C_a \equiv \ell^a_{\tau_1} + \ell^{-a}_{\tau_1} ; a \geq 0\right)$ est un carré de processus de Bessel de dimension 0, issu de 2 en $a = 0$. On a le :

Théorème : Soit $(\lambda^a ; a \geq 0)$ la famille des densités d'occupation de la valeur absolue du pont brownien. Alors :

1) pour toute fonctionnelle $F : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$E\left[F(\lambda^a ; a \geq 0) \right] = E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} C_{a\sqrt{\tau}} ; a \geq 0\right) \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \right]$$

où $(C_a , a \geq 0)$ désigne le carré d'un processus de Bessel de dimension 0, issu de 2, et $\tau = \int_0^\infty da\, C_a$.

2) ([1]) Notons $k_t = \sup\{ y : \int_y^\infty \lambda^a da > t \}$

Alors : $\left(\frac{1}{2} \lambda^{k_t} ; t \leq 1\right)$ est un méandre brownien.

Démonstration : 1) La première assertion découle de l'identité (1.a) et de ce que, d'après le théorème de Ray-Knight sur les temps locaux browniens, $(\ell^a_{\tau_1} ; a \geq 0)$ et $(\ell^{-a}_{\tau_1} ; a \geq 0)$ sont deux carrés de processus de Bessel de dimension 0, issus de 1, indépendants.

2) Posons $h_t = \sup\{ y : \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} C_{a\sqrt{\tau}}\, da > t \}$.

Un calcul élémentaire montre que :

$$h_t \cdot \sqrt{\tau} = \tilde{k}_{t\tau} \quad , \quad \text{où} \quad \tilde{k}_t = \sup\{ z : \int_z^\infty db\, C_b > t \}$$

On a alors : $\tilde{k}_{\tau - u} = \inf\{ z : \int_0^z db\, C_b > u \}$

D'après les résultats sur les changements de temps de processus de Bessel, on a :

$$\frac{1}{2} C_{\tilde{k}_{\tau-u}} = \hat{R}_u$$

avec $\hat{R}$ processus de Bessel d'indice $(-1/2)$, et $\hat{T}_0 \equiv \inf\{t : \hat{R}_t = 0\} = \tau$.
Soit R le retourné en $\hat{T}_0$ de $\hat{R}$; R est un processus de Bessel de dimension 3, et on a : $\frac{1}{2} C_{\tilde{k}_{\tau u}} = R_{u\hat{T}_0}$.

On a maintenant, à l'aide de ces remarques :

$$E\left[F\left(\tfrac{1}{2}\lambda^{k_t};\, t\le 1\right)\right] = E\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{T}_0}} R_{t\hat{T}_0};\, t\le 1\right)\sqrt{\frac{\pi}{2\hat{T}_0}}\right]$$

(d'après le théorème 3) $$= E\left[F(R_u;\, u\le 1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_1 \frac{1}{R_1^2}\right]$$

(d'après le théorème 2) $$= E\left[F(m(u);\, u\le 1)\right]$$

Références :

[1] Ph. Biane, M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sciences Mathématiques, 1987.

[2] K. L. Chung : Excursions in Brownian motion. Ark. för Math. 14, 155-177 (1976).

[3] Th. Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Maths. 833. Springer (1980).

[4] Th. Jeulin, M. Yor : Grossissements de filtrations : exemples et applications. Lect. Notes in Maths. 1118. Springer (1985).

[5] D. Williams : Path decomposition and continuity of local times for one-dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. 3, 28, 1974.

[ ] R. K. Getoor: The Brownian escape process.
Annals of Proba, n° 5, 7, 1979.

[ ] J. W. Pitman, M. Yor: Bessel processes and infinitely divisible laws.
In: "Stochastic Integrals", ed. D. Williams, Lect. Notes in Maths 85
Springer (1981).