Une application de la formule de balayage.

29 Mars 1987.

On note $(B_t; t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonction croissante de classe C^1, telle que $0 \leq \varphi(x) \leq x$.

On désigne par $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$(1) \qquad f(x)\varphi'(x) = f'(x)(x - \varphi(x))$$

et on note :

$$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \equiv f(x)(x - \varphi(x)) \qquad (\text{d'après } (1)).$$

On a alors l'identité en loi :

$$(2) \quad \begin{aligned} &\left(\int_0^\sigma ds\, 1_{(B_s \gtrless \varphi(S_s))} \,;\, \ell^0_\sigma(B - \varphi(S)) \right) \\ &\overset{(\text{loi})}{=} \left(\int_0^{\sigma(F(1))} \frac{ds}{(f^2 \circ F^{-1})(S_s)} 1_{(B_s \gtrless 0)} \,;\, \int_0^{\sigma(F(1))} \frac{d\ell^0_s}{(f \circ F^{-1})(S_s)} \right) \end{aligned}$$

où $\sigma(a) = \inf\{t : B_t = a\}$, et (ℓ^0_t) est le temps local en 0 de B.

Démonstration : On utilise l'identité en loi due à P. Lévy :

$$(S_t - B_t, S_t) \overset{(d)}{=} (|B_t|, L_t).$$

D'où :

$$\int_0^\sigma ds\, 1_{(B_s > \varphi(S_s))} \overset{(d)}{=} \int_0^\tau ds\, 1_{(|B_s| < L_s - \varphi(L_s))}, \text{ où } \tau = \inf\{u : L_u > 1\}.$$

$$\overset{(d)}{=} \int_0^\tau ds\, 1_{(f(L_s)|B_s| < f(L_s)(L_s - \varphi(L_s)))}$$

$$\overset{(d)}{=} \int_0^\tau ds\, 1_{(f(L_s)|B_s| < F(L_s))}, \text{ par défn. de } F.$$

D'après la formule de balayage, il existe un mouvement brownien réel $(\beta(t); t \geq 0)$ nul en 0, dont on note le temps local en 0 $(\ell(t), t \geq 0)$, tel que :

$$f(L_t) B_t = \beta\left(\int_0^t ds\, f^2(L_s)\right), \text{ et } F(L_t) = \ell\left(\int_0^t ds\, f^2(L_s)\right)$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^{\tau} ds\, 1_{(f(L_s)|B_s| < F(L_s))}$$

$$= \int_0^{\tau} ds\, \frac{f^2(L_s)}{f^2(L_s)}\, 1_{(f(L_s)|B_s| < F(L_s))}$$

$$= \int_0^{\hat{\tau}(F(1))} \frac{ds}{(f^2 \circ F^{-1})(\ell_s)}\, 1_{(|\beta_s| \leq \ell_s)}, \quad \text{où } \hat{\tau}(a) = \inf\{t : \ell_t > a\}.$$

$$\overset{(d)}{=} \int_0^{\sigma(F(1))} \frac{ds}{(f^2 \circ F^{-1})(S_s)}\, 1_{(B_s > 0)}.$$

Passons maintenant à l'obtention d'une représentation analogue de l'expression $\ell_\sigma^0(B - \varphi(S))$, via les mêmes transformations.

On a :

$$\ell_\sigma^0(B - \varphi(S)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\sigma} ds\, 1_{(0 < B_s - \varphi(S_s) < \varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\sigma} ds\, 1_{(0 < (B_s - S_s) + (S_s - \varphi(S_s)) < \varepsilon)}$$

$$\overset{(d)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} ds\, 1_{(0 < (L_s - \varphi(L_s)) - |B_s| < \varepsilon)}$$

$$\overset{(d)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} ds\, 1_{(0 < F(L_s) - f(L_s)|B_s| < \varepsilon f(L_s))}$$

$$\overset{(d)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\tau} \frac{ds\, f(L_s)}{\varepsilon\, f(L_s)} 1(0 < F(L_s) - f(L_s)|B_s| < \varepsilon f(L_s))$$

$$(3) \quad \overset{(d)}{=} \lim_{(\eta \to 0)} \frac{1}{\eta} \int_0^{\tau} ds\, f(L_s)\, 1(0 < F(L_s) - f(L_s)|B_s| < \eta)$$

$$\overset{(d)}{=} \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_0^{\hat{\tau}(F(1))} \frac{ds}{(f \circ F^{-1})(\ell_s)} 1(0 < \ell_s - |\beta_s| < \eta)$$

$$\overset{(d)}{=} \int_0^{\sigma(F(1))} \frac{dL_s}{(f \circ F^{-1})(S_s)} .$$

Exemple:

$\varphi(x) = ax$, avec $a < 1$. On pose $\bar{a} = 1 - a$.

Alors, l'équation (1) devient : $a f(x) = \bar{a} f'(x)$.

D'où :
$$f(x) = C x^b, \quad \text{où } b = a/\bar{a}, \quad \text{et } F(x) = C \bar{a} x^{1/\bar{a}}.$$

Le plus simple est alors de prendre $C = 1/\bar{a}$, ce qui donne :
$$F(x) = x^{1/\bar{a}} \; ; \; F^{-1}(x) = x^{\bar{a}} \; ; \; (f \circ F^{-1})(x) = (1/\bar{a})\, x^{a}.$$

L'identité en loi (2) devient donc :

$$(4) \quad \left(\int_0^\sigma ds\, 1_{(B_s \geq a S_s)} \; ; \; \ell^0_\sigma(B - aS) \right) \overset{(d)}{=} \left(\bar{a}^2 \int_0^\sigma \frac{ds}{S_s^{2a}} 1_{(B_s \geq 0)} \; ; \; \bar{a} \int_0^\sigma \frac{d\ell^0_s}{S_s^{a}} \right)$$