Une généralisation de la décomposition de Williams.

1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0.
On note $\sigma = \inf\{u : B_u = 1\}$, et $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.

Williams (1974) décompose le mouvement brownien $(B_t, t \leq \sigma)$ en 3 fragments sur les intervalles $(0,\mu)$, (μ, L) et (L,σ),

où :

$L = \sup\{t < \sigma : B_t = 0\}$, et μ est l'unique instant t sur $(0,L)$ auquel B_t atteint la valeur $\sup_{u<L} B_u$.

2. Nous nous proposons d'étendre, de manière adéquate, pour $a \in (0,1)$, les résultats de Williams au processus : $X_u = B_u - a S_u$; $u \leq \sigma$
en décomposant ce processus en 3 fragments sur les intervalles $(0,\mu_a)$, (μ_a, L_a) et (L_a, σ),

où $L_a = \sup\{t < \sigma : X_t = 0\}$, et μ_a est l'unique instant t sur $(0, L_a)$ auquel X_t atteint la valeur $\sup_{u < L_a} X_u$.

Remarquons tout d'abord que l'on a, en posant $\bar{a} = 1-a$:

(i) $\sigma = \inf\{u : X_u = \bar{a}\}$

(ii) $\sup_{u<L_a} X_u = \bar{a}\, S_{L_a}$, et, par définition : $B_{L_a} = a S_{L_a}$.

Comme l'a remarqué Pitman (1975), l'utilisation conjointe du théorème de retournement de Williams :

(1) $$(1 - B_{\sigma-u} \,;\, u \leq \sigma) \overset{(d)}{=} (R_u \,;\, u \leq \Delta_1)$$

où $(R_u, u \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0,
et $\Delta_1 = \sup\{t : R_t = 1\}$,
et du théorème de Pitman :

$$(2) \qquad (R_u ; u \geq 0) \overset{(d)}{=} (2S_u - B_u ; u \geq 0)$$

permet de donner une démonstration extrêmement simple de la décomposition de Williams à laquelle il a été fait allusion ci-dessus.

En employant la même méthode, on obtient le

Théorème : Soit $a \in (0,1)$, et $(X_u = B_u - aS_u ; u \leq \sigma)$.

1) Les processus $(X_u ; u \leq L_a)$ et $(X_{L_a+u} ; u \leq \sigma - L_a)$ sont indépendants, conditionnellement à la variable B_{L_a}.

2) Conditionnellement à $B_{L_a} = x$,
les processus $(X_u, u \leq \mu_a)$ et $(X_{L_a - u}, u \leq L_a - \mu_a)$ sont indépendants, et ont, respectivement, même loi que :

$$\left(X_u, u \leq \inf\left\{t : X_t = \frac{\bar{a}}{a}x\right\}\right) \text{ et } \left(B'_u, u \leq \inf\left\{t : B'_t = \frac{\bar{a}}{a}x\right\}\right)$$

où (B'_t) désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, indépendant de X.

3) Le processus $(\bar{a} - X_{\sigma - u} ; u \leq \sigma - L_a)$ a même loi que
$((2-a)S_u - B_u ; u \leq T_a)$, où $T_a = \inf\{u : (2-a)S_u - B_u = \bar{a}\}$.

3. De façon à pouvoir utiliser les calculs d'Azéma-Yor (1979) pour la résolution du problème de Skorokhod, il nous faut rappeler que, dans les transformations effectuées ci-dessus, le processus $(1 - B_{\sigma - u})$ correspond à $(2S_u - B_u)$.

On a donc, en conséquence de la troisième partie du théorème :

$$1 - B_{L_a} \overset{(d)}{=} 2S_{T_a} - B_{T_a}, \quad \text{d'où : } B_{L_a} \overset{(d)}{=} \frac{a}{2-a}(1 - B_{T_a}),$$

et, de façon plus complète:

$$(3) \qquad \left(\sigma - L_a , B_{L_a}\right) \overset{(d)}{=} \left(T_a , \frac{a}{2-a}\left(1 - B_{T_a}\right)\right)$$

Notons maintenant $\qquad A_a(t) = \int_0^t ds\, 1_{(B_s - aS_s > 0)}$

et $\ell_a(t)$ le temps local en 0 de $(B_s - aS_s ,\, s \leq t)$.

On notera simplement A_a, resp: ℓ_a, pour: $A_a(\sigma)$, resp: $\ell_a(\sigma)$.

A l'aide du théorème, et de la propriété de scaling, on obtient l'identité en loi conjointe:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{lcl} A_a(L_a) & \overset{(d)}{=} & \left(\dfrac{1-B_{T_a}}{2-a}\right)^2 \left(\bar{a}^2 A'_0 + A''_a\right) \\ \ell_a & \overset{(d)}{=} & \left(\dfrac{1-B_{T_a}}{2-a}\right) \left(\bar{a}\, \ell'_0 + \ell''_a\right) \\ M_a & \overset{(d)}{=} & \bar{a}\left(\dfrac{1-B_{T_a}}{2-a}\right) \qquad \left(\text{par définition, } M_a = \sup_{s \leq L_a} X_s\right) \\ \sigma - L_a & \overset{(d)}{=} & T_a \end{array} \right.$$

(précisons que ce sont bien les 2 variables à valeurs dans $\mathbb{R}_+^4$ dont les composantes figurent à gauche et à droite du signe $\overset{(d)}{=}$ qui ont même loi).

A'_0 et ℓ'_0, resp: A''_a et ℓ''_a désignent des quantités de type A et ℓ, avec paramètres respectifs 0 et a, associés à des mouvements browniens réels B' et B'' indépendants entre eux, et indépendants de B.

4. Nous nous proposons maintenant d'étudier la loi conjointe de $(A_a(L_a), \sigma - L_a)$ conditionnellement à ℓ_a.

Pour cela, nous utiliserons simultanément l'identité en loi (4), l'expression explicite de la loi de (B_{T_a}, T_a), obtenue comme cas particulier des calculs d'Azéma-Yor, et enfin la proposition (6.1), où est explicitée la loi de (A_a, ℓ_a).

(4.1) Posons tout d'abord : $m_a = \dfrac{1-B_{T_a}}{2-a}$; cette variable est liée à S_{T_a} par la relation : $S_{T_a} = 1-m_a$.

On a, d'après Azéma-Yor :

$$(5)\quad \begin{cases} P\left(m_a \in dm\right) = \dfrac{1}{\bar a}\, m^{\left(\frac{1}{\bar a}-1\right)}\, 1_{(0\le m\le 1)}\, dm \\[2ex] E\left[\exp -\dfrac{q^2}{2} T_a \,\middle|\, m_a = m\right] = \dfrac{q\bar a}{sh(q\bar a)} \left(\dfrac{sh(q\bar a m)}{m\, sh(q\bar a)}\right)^{\frac{1}{\bar a}-1} \end{cases}$$

(Pour une explication de cette factorisation, voir Jeulin-Yor : Sém. $\overline{\text{XV}}$, 1981).

(4.2) Posons maintenant :

$$\Phi(\lambda,\mu,\nu) = E\left[\exp -\left\{\frac{\mu^2}{2}(\sigma - L_a) + \lambda \ell_a + \frac{\nu^2}{2} A_a(L_a)\right\}\right]$$

D'après l'identité en loi (4), on a :

$$\Phi(\lambda,\mu,\nu)$$
$$= E\left[\exp -\left\{\frac{\mu^2}{2} T_a + \lambda m_a\left[\bar a \ell'_0 + \ell''_a\right] + \frac{\nu^2}{2} m_a^2\left[\bar a^2 A'_0 + A''_a\right]\right\}\right]$$

Posons ensuite :

$$\psi(\lambda,\nu,m)$$
$$= E\left[\exp -\left\{\lambda m\left[\bar a \ell'_0 + \ell''_a\right] + \frac{\nu^2 m^2}{2}\left[\bar a^2 A'_0 + A''_a\right]\right\}\right]$$
$$= E\left[\exp -\left\{\lambda m \bar a \ell'_0 + \frac{\nu^2 m^2 \bar a^2}{2} A'_0\right\}\right] E\left[\exp -\left\{\lambda m \ell''_a + \frac{\nu^2 m^2}{2} A''_a\right\}\right]$$

En appliquant maintenant la formule (6.b) de la Proposition (6.1), on obtient :

$$\psi(\lambda,\nu,m)$$
$$= \left(ch(\nu m\bar a) + \frac{2\lambda}{\nu} sh(\nu m \bar a)\right)^{-1}\left(ch(\nu m\bar a) + \frac{2\lambda}{\nu} sh(\nu m\bar a)\right)^{-1/\bar a}$$
$$= \left(ch(\nu m\bar a) + \frac{2\lambda}{\nu} sh(\nu m\bar a)\right)^{-\left(\frac{1}{\bar a}+1\right)}. \qquad (6)$$

On déduit de cette dernière formule, en faisant $m = \frac{n}{2-a}$,
l'identité en loi :

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{2-a}\left[\bar a\, \ell'_0 + \ell''_a \right] ; \frac{1}{(2-a)^2}\left[\bar a^2 A'_0 + A''_a \right] \right) \overset{(d)}{=} \left(\ell_{a'} ; A_{a'} \right), \quad \text{où } \overline{a'} = \frac{\bar a}{2-a}.$$

De toutes façons, on a, à l'aide de (5) et (6) :

$$\Phi(\lambda,\mu,\nu) = \int_0^1 dm \left(\frac{\mu}{sh(\mu \bar a)} \right) \left(\frac{sh(\mu \bar a m)}{sh(\mu \bar a)} \right)^{\frac{1}{\bar a}-1} \left(ch(\nu m \bar a) + \frac{2\lambda}{\nu}\, sh(\nu m \bar a) \right)^{-\left(\frac{1}{\bar a}+1\right)}.$$