Une décomposition non-canonique de certains processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés.

8 Février 1990.

1. Position du problème.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ un $((\mathcal{F}_t), P)$ mouvement brownien réel, issu de 0.

En [ ], nous avons étudié les différentes propriétés (existence, unicité, adaptation, propriétés de semimartingales, etc...) des solutions des équations linéaires :

$$(1.a)_\nu \qquad X_t = B_t + \int_0^t X_u \, d\nu(u)$$

où ν est une mesure de Radon diffuse, signée, sur $]0,\infty[$

(Nota bene : $\int_0^t X_u \, d\nu(u)$ est défini ici simplement comme $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^t X_u \, d\nu(u)$)

On associe à la mesure ν la fonction $N(t) = \exp(\nu(]t,1]))$ $(0<t<\infty)$

On dira que ν appartient à la classe d'unicité si l'équation $(1.a)_\nu$ admet une et ~~et~~ une seule solution. D'après [ ], on a la

Proposition 1 : ν appartient à la classe d'unicité si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées :

$$(1.b) \begin{cases} (i) & N(t) \text{ ne converge pas vers } \infty \text{ lorsque } t \to 0; \\ (ii) & \int_0^1 N^2(t)\,dt < \infty \\ (iii) & \lim_{t\to 0} \frac{1}{N(t)} \int_0^t N(r)\,dB_r = 0 \end{cases}$$

Lorsque ces conditions sont réalisées, l'unique solution $(X_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ de $(1.a)_\nu$ est :

$$(1.c) \qquad X_t^{(\nu)} = \frac{1}{N(t)} \int_0^t N(r)\,dB_r .$$

Remarque importante : Par souci de simplicité, nous avons présenté la triple condition (1.b) avec le critère (iii) qui fait intervenir l'intégrale de Wiener $\int_0^t N(r)dB_r$. Cependant, en [ ], Proposition 16, nous avons montré que, lorsque les critères (i) et (ii) sont satisfaits, le critère (iii) équivaut au critère déterministe suivant :

$$\text{(iii}'\text{)} \qquad \int_0 du \left(\frac{N^2(u)}{\int_0^u N^2(s)\,ds}\right) \exp\left(-\varepsilon\, \underset{\sim}{N}^2(u) \int_0^u N^2(s)\,ds\right) < \infty, \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

$$\text{où} \quad \underset{\sim}{N}(u) = \inf_{v \le u} \left(\frac{N(v)}{\int_0^v N^2(s)\,ds}\right).$$

Notation : Lorsque ν appartient à la classe d'unicité, nous dirons que la solution $(X_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé de drift ν.
On note Q^ν la loi d'un tel processus.

(1.2) Nous allons maintenant poser un problème, qu'il sera commode d'appeler problème inverse, relatif à certaines mesures de Radon diffuses, signées, sur $]0,\infty[$, qui n'appartiendront pas (comme nous le verrons a posteriori) à la classe d'unicité.
Soit donc μ une mesure de Radon diffuse, signée, sur $]0,\infty[$.
On se propose de décrire toutes les probabilités P sur l'espace $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, nulles en 0, telles que le processus des coordonnées $X_t(\omega) \equiv \omega(t)$ satisfasse, relativement à P, les propriétés suivantes :

(1.d)
- (p.1) le processus $\left(\xi_t \equiv X_t - \int_0^t X_u\, d\mu(u), t \geq 0\right)$ est un mouvement brownien réel ;
- (p.2) pour tout t, la variable X_t est P-indépendante de $(\xi_s, s \leq t)$.

Nous noterons $\mathcal{I}_\mu$ l'ensemble des probabilités P satisfaisant (1.d).
Remarquons que, si $P \in \mathcal{I}_\mu$, le processus $(X_t, t \geq 0)$ est alors solution de $(1.a)_\mu$, avec $B \equiv \xi$, mais cette solution n'est pas adaptée à la filtration de ξ.

Voici un premier résultat concernant $\mathcal{J}_\mu$.

Proposition 2 : On note $M(t) = \exp(\mu(]t, 1]))$.
Alors, $\mathcal{J}_\mu$ n'est pas vide si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées :

$$(1.e)_\mu \begin{cases} (j) & \lim_{t \to 0} M(t) = \infty . \\ (jj) & \lim_{t \to 0} \frac{1}{M(t)} \int_t^1 M(r)\, dB_r = 0 \\ (jjj) & \int^\infty M^2(t)\, dt < \infty . \end{cases}$$

Démonstration : Supposons que $\mathcal{J}_\mu$ ne soit pas vide.

1) Montrons tout d'abord que, nécessairement (j) est satisfaite.
S'il n'en était pas ainsi, on aurait : $\varliminf_{t \to 0} M(t) < \infty$, et d'après la Proposition 13 de [ ], il est alors nécessaire et suffisant, pour que $(1.a)_\mu$ ait une solution, que la triple condition (1.b) soit satisfaite.
Mais alors, $(1.a)_\mu$ admet une unique solution donnée par la formule :

$$(1.c) \qquad X_t = \frac{1}{M(t)} \int_0^t M(r)\, d\xi_r .$$

Or, cette solution est adaptée à la filtration de ξ, et $\mathcal{J}_\mu$ est donc vide. Ainsi, on doit avoir : $\lim_{t \to 0} M(t) = \infty$.

2) Toujours d'après la Proposition 13 de [ ], si (j) est satisfaite, une condition nécessaire et suffisante pour que $(1.a)_\mu$ admette une solution est que (jj) soit satisfaite.

3) Soit maintenant $P \in \mathcal{J}_\mu$. Sous P, $(X_t, t \geq 0)$ est solution de $(1.a)_\mu$ avec $\xi \equiv B$. On a donc, pour $0 < s < t$:

$$(1.f) \qquad M(t) X_t = M(s) X_s + \int_s^t M(u)\, d\xi_u ,$$

et donc :

$$M(s) X_s = M(t) X_t - \int_s^t M(u)\, d\xi_u .$$

Grâce à l'indépendance de la variable X_t et de $(\xi_u, u \leq t)$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E\left[\exp\left(i\lambda M(s) X_s\right)\right] = E\left[\exp\left(i\lambda M(t) X_t\right)\right] \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_s^t M^2(u)\,du\right)$$

En conséquence, si l'on avait : $\int^{\infty} M^2(u)\,du = \infty$,

on aurait alors :

$$E\left[\exp\left(i\lambda M(s) X_s\right)\right] = 0, \text{ pour tout } \lambda \neq 0,$$

ce qui n'est pas possible, à cause de la continuité de la fonction caractéristique de $M(s) X_s$ en $\lambda = 0$. La condition (jjj) est donc satisfaite.

<u>Inversement</u>, supposons que la condition $(1.e)_\mu$ soit satisfaite.

Il est alors immédiat que le processus :

$$(1.g) \qquad X_t = -\frac{1}{M(t)} \int_t^{\infty} M(u)\,d\xi_u \qquad (t \geq 0)$$

est solution de l'équation $(1.a)_\mu$, et que, pour tout $t > 0$, la variable X_t est indépendante de $(\xi_u, u \leq t)$.

En conséquence, la loi, que nous noterons $P_0^{(\mu)}$, du processus donné par la formule (1.g), appartient à $\mathcal{J}_\mu$ □

<u>Complément</u> : <u>Critère déterministe assurant (jj)</u>.

De même qu'en ce qui concerne la condition (iii), la condition (jj) est, grâce à la Proposition 16 de [ ], équivalente à :

$$(\text{jj}') \qquad \int_0 \frac{du\, M^2(u)}{\int_u^1 M^2(s)\,ds} \exp\left(-\varepsilon \frac{\tilde{M}^2(u)}{\int_u^1 M^2(s)\,ds}\right) < \infty, \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

où l'on a noté : $\tilde{M}(u) = \inf_{v \leq u} M(v)$.

(1.3) Dans le reste de cette Note, nous donnons tout d'abord une description complète des éléments de $\mathcal{J}_\mu$, lorsque la condition $(1.e)_\mu$ est satisfaite ; d'autre part, μ étant donnée, nous caractérisons les lois Q^ν des processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés (cf. (1.1)) qui appartiennent à $\mathcal{J}_\mu$.

3. Sur les lois Q^ν qui appartiennent à $\mathcal{J}_\mu$.

Soit μ mesure de Radon signée sur $]0,\infty[$ telle que la condition $(1.e)_\mu$ soit satisfaite.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de déterminer, lorsqu'~~elles~~ il en existe, toutes les mesures ν de la classe d'unicité telles que la loi Q^ν du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé de drift ν appartienne à $\mathcal{J}_\mu$.

Rappelons que, d'après le paragraphe précédent, la loi P d'un processus gaussien centré appartient à $\mathcal{J}_\mu$ si, et seulement si, on peut écrire, relativement à P :

$$X_t = \frac{Y}{M(t)} - \frac{1}{M(t)} \int_t^\infty M(s)\, d\xi_s \quad ,$$

où Y est une variable gaussienne centrée, de variance σ^2, indépendante de $(\xi_u, u \geq 0)$.

La covariance $\Gamma(s,t)$ $(s \leq t)$ du processus $(X_t, t \geq 0)$ est donc :

$$(3.a) \qquad \Gamma(s,t) = \frac{\sigma^2}{M(s)M(t)} + \frac{1}{M(s)M(t)} \int_t^\infty M^2(u)\,du .$$

D'autre part, d'après la formule $(1.e)$, la covariance $\Gamma_\nu(s,t)$ $(s \leq t)$ du processus de Ornstein-Uhlenbeck généralisé $(X_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ est :

$$(3.b) \qquad \Gamma_\nu(s,t) = \frac{1}{N(s)N(t)} \int_0^s N^2(r)\,dr$$

Pour que $\Gamma = \Gamma_\nu$, il est donc nécessaire et suffisant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, simultanément :

$$(3.c) \qquad \frac{1}{N(s)} \int_0^s N^2(r)\,dr = C \frac{1}{M(s)}$$

et

$$(3.d) \qquad \frac{1}{N(t)} = \frac{1}{C} \left(\frac{\sigma^2}{M(t)} + \frac{1}{M(t)} \int_t^\infty M^2(u)\,du \right)$$

Réécrivons $(3.d)$ sous la forme équivalente :

$$(3.d') \qquad N(t) = C\, M(t) \Big/ \left(\sigma^2 + \int_t^\infty M^2(u)\,du \right)$$