# Une extension de la relation d'Imhof entre le méandre brownien et le processus de Bessel de dimension 3.

21 Novembre 89.

1) Conformément aux notations de Pitman-Yor (: A decomposition of Bessel Bridges), $Q^{d}_{x \to y}$ désignera ici le pont, durant l'intervalle de temps $[0,1]$, issu de $x$, et se terminant en $y$, du carré du processus de Bessel de dimension $d$.

On déduit de la propriété d'additivité des carrés de Bessel la propriété :

$$(1) \qquad Q^{d+d'}_{x+x' \to 0} = Q^{d}_{x \to 0} \oplus Q^{d'}_{x' \to 0} \,,$$

d'où, par retournement au temps 1 :

$$(1') \qquad Q^{d+d'}_{0 \to x+x'} = Q^{d}_{0 \to x} \oplus Q^{d'}_{0 \to x'} \,,$$

et, en particulier :

$$(1'') \qquad \boxed{Q^{d+d'}_{0 \to x} = Q^{d}_{0 \to 0} \oplus Q^{d'}_{0 \to x} .}$$

2) Considérons maintenant $(R_t, t \leq 1)$ et $(R'_t, t \leq 1)$ deux processus de Bessel indépendants, issus de $0$, de dimensions respectives $d$ et $d'$; conditionnons $R$ par $R_1 = 0$, et désignons par $M^{d,d'}$ la loi de $\left((R_t^2 + R_t'^2)^{1/2}, t \leq 1\right)$, ainsi obtenu.
En d'autres termes, la loi du carré de ce processus, c'est à dire : $(R_t^2 + R_t'^2 ; t \leq 1)$ est : $Q^{d}_{0 \to 0} \oplus Q^{d'}_{0}$.

On a alors, en désignant par $P_0^{d+d'}$ la loi du processus de Bessel de dimension $d+d'$, issu de $0$, sur $C([0,1], \mathbb{R}_+)$ :

$$(2) \qquad \boxed{P_0^{d+d'} = \frac{X_1^d}{c_{d,d'}} \cdot M^{d,d'}}$$

où $c_{d,d'} = M^{d,d'}(X_1^d) = 2^{d'/2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{d+d'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$.

Démonstration de la formule (2) :

a) D'après la formule (1''), les lois des deux membres de (2), conditionnellement à $X_1 = x$, sont égales ;

b) Il reste à vérifier que les lois de $X_1$ relativement à chacune des deux membres de (2) sont identiques, ce qui est immédiat.

## 3) Applications aux méandres de Bessel.

Soit $d_- \in ]0,2[$ ; désignons par $M_{(d_-)}$ la loi du méandre de Bessel, c'est à dire la loi de :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1-g}} R_{g+t(1-g)} \; ; t \leq 1 \right)$$

où $g = \sup\{t \leq 1 \,;\, R_t = 0\}$, et $R$ est un processus de Bessel de dimension $d_-$. Notons : $d_- = 2(1-\nu)$, $d_+ = 2(1+\nu)$.

La relation, due à Imhof, d'absolue continuité qui existe entre la loi du processus de Bessel de dimension 3, et celle du méandre brownien, s'étend de la façon suivante entre une relation entre $P_0^{d_+}$ et $M_{(d_-)}$ :

$$(3) \qquad P_0^{d_+} = \frac{X_1^{2\nu}}{c_\nu} M_{(d_-)} .$$

Or, d'après (2), on a :

$$(2)_{d_+} \qquad P_0^{d_+} = \frac{X_1^{(d_+-2\nu)}}{c_{d_+-2,2}} \cdot M^{d_+-2,\, 2} ,$$

et, par comparaison de (3) et $(2)_{d_+}$, on obtient :

$$(4) \qquad \boxed{M_{(d_-)} = M^{d_+-2,\, 2}}$$

J'ai d'ailleurs explicité, il y a un an, la décomposition de $X$ sous $M^{d,d'}$ comme semimartingale (voir : Méandres et processus de Bessel, II) dans sa filtration propre.

4) Un autre exemple intéressant est la loi $N^d$ $(d>2)$ du processus : $\left( \frac{1}{\sqrt{L_{(d)}}} R_{uL_{(d)}} \, ; u \leq 1 \right)$

où $R$ est le processus de Bessel de dimension $d>2$, issu de $0$, et $L_{(d)} = \sup \{ t \geq 0 : R_t = 1 \}$.

On a alors (cf : Biane - Le Gall - Yor) :

$$(5) \qquad P_0^d = \frac{X_1^{2\nu}}{d-2\nu} \cdot N^d .$$

On déduit à nouveau de (2) que l'on a : $(6)\ \boxed{N^d = M^{2,\, d-2\nu}}$

Ainsi, d'une certaine façon, les formules (4) et (6) jouent des rôles symétriques.