Une factorisation de certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel ; généralisation à quelques processus à accroissements indépendants.

1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0, et $\nu \geq 0$. Dans le domaine des Mathématiques financières en particulier, les fonctionnelles exponentielles :

$$A_t^{(\nu)} = \int_0^t ds \exp 2(B_s + \nu s) \qquad , \quad t \geq 0,$$

jouent un rôle important (l'exposant 2 a été choisi pour la commodité des calculs à suivre mais, par scaling, on peut le remplacer par n'importe quel réel non nul).

Il semble donc intéressant de pouvoir représenter, de manière aussi simple que possible, une description de la loi de $A_t^{(\nu)}$ a été donnée en
la variable $A_t^{(\nu)}$, pour t fixé ;
[ ], mais sa densité est compliquée.

L'objet de cet article est de montrer que, si l'on remplace t par un temps exponentiel T indépendant de B, la variable $A_T^{(\nu)}$ peut alors être représentée comme rapport de deux variables indépendantes, le numérateur étant une variable beta, et le dénominateur une variable gamma. Cette représentation rend les calculs concernant la variable $A_T^{(\nu)}$ extrêmement faciles, comme nous le verrons par la suite.

Nous commençons par démontrer le

Théorème 1. Soit $\lambda > 0$; on pose : $\mu = \sqrt{2\lambda + \nu^2}$.

Alors, si T_λ désigne un temps exponentiel indépendant de B, on a :

$$(1.a) \qquad A_{T_\lambda}^{(\nu)} \overset{(\text{loi})}{=} \frac{Z_{1,a}}{2 Z_b},$$

où $a = \frac{\mu + \nu}{2}$, $b = \frac{\mu - \nu}{2}$, $Z_{\alpha,\beta}$ désigne une variable beta de paramètres (α, β) et Z_γ une variable gamma de paramètre γ. Enfin, $Z_{1,a}$ et Z_b sont supposées indépendantes.

Corollaire :

La démonstration du Théorème 1 repose de manière essentielle sur la représentation classique suivante :

$$\exp(B_t + \nu t) = R^{(\nu)}\left(A_t^{(\nu)}\right), \qquad (1.b)$$

où $\left(R^{(\nu)}(s), s \geq 0\right)$ désigne un processus de Bessel d'indice ν, ou de dimension $\delta_\nu \equiv 2(\nu+1)$, issu de 1.

Pour tout $\alpha \geq 0$, et tout $x \geq 0$, on note $Q_x^{(\alpha)}$ la loi du carré, issu de x, du processus de Bessel d'indice α, loi définie sur $\Omega^* = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, espace canonique des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, sur lequel on considère le processus des coordonnées $X_s(\omega) = \omega(s)$, et $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$.

Rappelons la relation d'absolue continuité : pour tout $x > 0$,

$$(1.c) \qquad Q_x^{(\alpha)}\Big|_{\mathcal{F}_s} = \left(\frac{X_s}{x}\right)^{\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^s \frac{du}{X_u}\right) \cdot Q_x^{(0)}\Big|_{\mathcal{F}_s}.$$

Une première étape de la démonstration de l'identité (1.a) est le :

Lemme 1 : Pour tout $\mu \geq 0$, on a, en posant :

$$\tau_u^{(\nu)} = \int_0^u ds \left(R^{(\nu)}(s)\right)^{-2}, \quad \text{et } b = \frac{\mu - \nu}{2},$$

(1.d) $\quad \mathbb{P}\left(A^{(\nu)}_{T_\lambda} \geq u\right) \underset{(i)}{=} E\left[\exp\left(-\lambda \tau_u^{(\nu)}\right)\right] \underset{(ii)}{=} Q_1^{(\mu)}\left(\frac{1}{(X_u)^b}\right)$

Démonstration :

a) L'inverse du processus croissant $(A_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ est $(\tau_u^{(\nu)}, u \geq 0)$, ce qui implique :

$$\lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}\left(A_t^{(\nu)} \geq u\right) = \lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}\left(\tau_u^{(\nu)} < t\right) = E\left[\exp\left(-\lambda \tau_u^{(\nu)}\right)\right],$$

c'est à dire (1.d)(i).

b) On déduit de la relation d'absolue continuité (1.e) les égalités suivantes, en notant $\tau_u = \int_0^u \frac{ds}{X_s}$:

$$Q_1^{(\nu)}\left(\exp(-\lambda \tau_u)\right) = Q_1^{(0)}\left((X_u)^{\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_u\right)\right) = Q_1^{(\mu)}\left((X_u)^{\frac{\nu-\mu}{2}}\right),$$

ce qui fournit bien l'identité (1.d)(ii), puisque $b = \frac{\mu-\nu}{2}$ □

Le lemme suivant donne une représentation intégrale du membre de droite de (1.d).

Lemme 2 : Soient $\mu, b \geq 0$. On a, pour tout $z \geq 0$:

(1.e) $$Q_z^{(\mu)}\left(\frac{1}{(X_u)^b}\right) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^{1/2u} dv\, \exp(-zv)\, v^{b-1} (1-2uv)^{\mu-b}$$

Démonstration : On utilise la formule élémentaire :

$$\frac{1}{r^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty dt\, e^{-tr}\, t^{b-1},$$

d'où l'on déduit :

$$Q_z^{(\mu)}\left(\frac{1}{(X_u)^b}\right) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty dt\, t^{b-1}\, Q_z^{(\mu)}\left(e^{-tX_u}\right)$$

On utilise ensuite la formule :

$$Q_z^{(\mu)}\left(e^{-tX_u}\right) = \frac{1}{(1+2tu)^{\mu+1}} \exp\left(-z\frac{t}{1+2tu}\right)$$

(voir, par exemple, Revuz-Yor [ ], p.)

On obtient finalement la formule (1.e) en faisant le changement de variables $v = \dfrac{t}{1+2tu}$ □

On prend maintenant $z = 1$.

Si l'on pose $x = 1/2u$, on voit, en rapprochant (1.a), (1.d) et (1.e), que la démonstration du théorème 1 est ramenée à la preuve de l'identité :

$$(1.f) \qquad \frac{x^b}{\Gamma(b)} \int_0^1 dt\, e^{-tx}\, t^{b-1} (1-t)^{\mu-b} = P\left(\frac{Z_b}{Z_{1,\mu-b}} < x\right)$$

Or, le membre de droite de (1.f) est égal à :

$$P\left(Z_b < x Z_{1,\mu-b}\right) = \frac{1}{\Gamma(b)} E\left[\int_0^{x Z_{1,\mu-b}} dy\, y^{b-1} e^{-y}\right]$$

$$= \frac{x^b}{\Gamma(b)} E\left[(Z_{1,\mu-b})^b \int_0^1 dt\, t^{b-1} e^{-tx Z_{1,\mu-b}}\right]$$

La démonstration de l'identité (1.f) est donc ramenée à celle de

$$(1.g) \qquad E\left[\exp\left(-x Z_{b,\mu-b+1}\right)\right] = E\left[\frac{(Z_{1,\mu-b})^b}{b\,B(b,\mu+b+1)} \exp\left(-x Z_{1,\mu-b} Z_{b,1}\right)\right]$$

Cette identité est maintenant une conséquence du

Lemme 3 : 1) Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, on a :

$$Z_{\alpha,\beta}\, Z_{\alpha+\beta,\gamma} \overset{(\text{loi})}{=} Z_{\alpha,\beta+\gamma}$$

2) Pour toute fonction borélienne $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a :

$$(1.h) \qquad E\left[f\left(\underset{Z_{b,a+1}}{\cancel{Z_{b,1} Z_{b+1,a}}}\right)\right] = E\left[\frac{(Z_{1,a})^b}{b\,B(b,a+1)} f\left(Z_{1,a} Z_{b,1}\right)\right]$$

Démonstration : a) La première assertion est une relation algébrique classique entre les lois des variables beta ;

b) La relation ci-dessous, valable pour toute fonction borélienne $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$E\left[g(Z_{b+1,a})\right] = E\left[\frac{(Z_{1,a})^b}{b\,B(b,a+1)} g(Z_{1,a})\right]$$

est un simple jeu de notations.

En conséquence, on a, pour toute fonction borélienne $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$(1.i) \qquad E\left[f\left(Z_{b,1} Z_{b+1,a}\right)\right] = E\left[\frac{(Z_{1,a})^b}{b\,B(b,a+1)} f\left(Z_{1,a} Z_{b,1}\right)\right]$$

Or, à l'aide de la première assertion du lemme 3, on a :

$$Z_{b,a+1} \overset{(\text{loi})}{=} Z_{b,1}\, Z_{b+1,a},$$

ce qui permet de déduire (1.h) de (1.i) □

l'identité (1.g) est donc démontrée, et la preuve du Théorème 1 est terminée.

Nous montrons maintenant que, en conséquence de la représentation (1.a), il est extrêmement aisé de calculer certains "moments tronqués" qui ont une grande importance en Mathématiques financières. Les calculs sont élémentaires, et laissés au lecteur.

Proposition 1 : 1) Soient $Z_{\alpha,\beta}$ et Z_γ deux variables aléatoires indépendantes qui sont respectivement, une variable beta de paramètres (α, β), et une variable gamma, de paramètre γ. On a alors, pour tout $x > 0$, et tout $n < \gamma$:

$$E\left[\left\{\left(\frac{Z_{\alpha,\beta}}{Z_\gamma} - \frac{1}{x}\right)^+\right\}^n\right]$$

$$= \frac{x^{\gamma-n}}{\Gamma(\gamma) B(\alpha,\beta)} \int_0^1 du\, e^{-xu}\, u^{\gamma-n-1} (1-u)^{\beta+n} \int_0^1 dw\, \left(u + w(1-u)\right)^{\alpha-1} w^n (1-w)^{\beta-1}$$

2) Dans le cas particulier où $\alpha = 1$, cette formule se simplifie en :

$$E\left[\left\{\left(\frac{Z_{1,\beta}}{Z_\gamma} - \frac{1}{x}\right)^+\right\}^n\right] = \frac{x^{\gamma-n}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 du\, e^{-xu}\, u^{\gamma-n-1} (1-u)^{\beta+n} \left(\beta B(n+1,\beta)\right)$$

3) Cette dernière formule peut également être écrite sous la forme :

$$E\left[\left\{\left(\frac{Z_{1,\beta}}{Z_\gamma} - \frac{1}{x}\right)^+\right\}^n\right] = \frac{E\left[\left(\frac{Z_{1,\beta}}{Z_\gamma}\right)^n\right]}{\Gamma(\gamma-n)} \cdot x^{\gamma-n} \int_0^1 du\, e^{-xu}\, u^{\gamma-n-1} (1-u)^{\beta+n}.$$

Remarque : Dans la Note [ ], nous avions commencé par le calcul de ces moments tronqués, et c'est l'inspection des résultats obtenus qui nous a amené à la formule de factorisation (1.a).