Questions relatives à la Note

"Une inégalité optimale pour le mouvement Brownien arrêté à un temps quelconque".

M. Yor.

I. Énoncés des questions.

1. Calcul de la loi de : $\sup_t (B_t - t^{p/2})$ $(p>1)$

$\sup_t (|B_t| - t^{p/2})$ $(p>1)$.

$\sup_t (R(t) - t)$ [R : processus de Bessel de dimension d].

Pour l'instant, je ne connais la loi de ces variables que pour $p=2$, et $d=1$, ou 3.
La résolution de cette question donnerait la valeur de σ en (2).
Les articles de Robbins-Siegmund [ ] et Shepp [ ] sont très liés à cette question.

2. Unicité du temps de réalisation du max. absolu pour $B_t - t^{p/2}$ $(p>1)$, $|B_t| - t^{p/2}$ $(p>1)$
(Peut-on se ramener, par absolue continuité, à $(B_t - t)$?)

3. Admettons que la réponse à la question 2. soit positive, et notons $L_{(p)}$ cet unique temps (sinon, on pourra toujours considérer : $L^+_{(p)} = \sup\{t : B_t - t^{p/2} = \sup_t\{\ \}\}$

$L^-_{(p)} = \inf\{t : B_t - t^{p/2} = \sup_t\{\ \}\}$.)

A-t-on : $E((L_{(p)})^{p/2}) < \infty$? ; de façon plus générale, estimation de $P(L_{(p)} > t)$.
Si, à nouveau, la réponse à cette question est positive, on pourra énoncer un théorème analogue au théorème 3 pour tout $p>1$.

4. Pour quelles fonctions Ψ, continues, croissantes, a-t-on :

$$E\left[\sup_t \left(B_t - \Psi(t^{1/2})\right)\right] < \infty \ ?$$

Si une telle fonction est une fonction de Young, on en déduira, par homogénéité,

$$E[B_L] \le c_\Psi \|L^{1/2}\|_\Psi \ ;$$

Y a-t-il une "meilleure" Ψ ? Calcul de la constante c_Ψ.
(En fait, tout indique - voir plus loin - que parmi les fonctions $\Psi_\alpha(x) = x^{1/2}(\log x)^\alpha$, le cas $\alpha = 1/2$ est critique)

5. Pour "éliminer" les problèmes d'intégrabilité de $L_{(p)}$ (question 3.), on peut s'intéresser à la meilleure constante $c^{(n)}$ telle que :

$$E(B_L) \le c^{(n)} \|L^{1/2}\|_p ,$$

où L varie parmi les variables $\le n$; on pourrait également proposer : L ($\mathcal{F}_n$) mes, et plus généralement : $L \le T$ temps (d'arrêt) donné, où L ($\mathcal{F}_T$) mesurable.

6. Diverses extensions.

6.1) Aux martingales en général, en essayant de majorer

$$E(M_L) \text{ par } c_p \|[M]_L^{1/2}\|_p$$

Cas des martingales à sauts positifs.

6.2) Aux processus à accroissements indépendants (P.A.I) en temps continu, ou bien aux martingales discrètes, sommes de v.a., i.i.d.

Dans les deux sous-questions, les formules exponentielles doivent jouer un rôle fondamental, il y a aussi des relations avec la transformée de Cramer, et les grandes déviations (cf [ ]).

6.3) Au drap Brownien, indexé par $\mathbb{R}_+^d$, à l'aide de ses propriétés d'homogénéité.

7. Inégalités inverses, meilleures constantes ?

A-t-on : $$E\Big[\sup_t \big(t^k - (B_t^*)^{2k+\varepsilon}\big)\Big] < \infty \ ?$$

Si oui, calcul d'homogénéité, etc –

8. On a : $$\cdot \sup_t \{B_t - t^{p/2}\} \xrightarrow[(p\downarrow 1)]{} \infty$$

Mais, à quelle vitesse a lieu cette convergence ?

$$\cdot \sup_{(t\ge 1)} \{B_t - t^{1/2}(\log t)^{\varepsilon}\} \xrightarrow[(\varepsilon\downarrow 0)]{} \infty$$

III. Début de réponse aux questions.

1. Question 4.

Théorème 1 Soit $\varphi(s) = \{s(\log s)\}^{1/2}\,\Pi(s)$, avec* $\Pi(s)$ croissante, continue, et telle que $\Pi(s) \uparrow \infty$ $(s \to \infty)$.

Alors : $E\left[\sup_t (B_t - \varphi(t))\right] < \infty$.

La condition* donnée ici sur φ est, en un sens, la meilleure possible, puisque, d'après II, si $\varphi(s) = (s(\log s))^{1/2}$, on a : $E\left[\sup_t (B_t - \varphi(t))\right] = \infty$.

La démonstration du théorème repose sur le

Lemme : Si φ continue, $\uparrow$, satisfait :

$$(C_1) \quad \int^\infty ds \int_{\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}}^\infty e^{-x^2/2}\,dx < \infty$$

$$(C_2) \quad \varphi(t) \geq \left(t\left(\log \frac{t}{A}\right)\right)^{1/2}, \text{ pour } t \text{ suff}^t \text{ grand.}$$

$$(C_3) \quad \int^\infty d\varphi(s) \int_{\varphi(s)/\sqrt{s}}^\infty e^{-x^2/2}\,dx < \infty,$$

alors : $E\left[\sup_t (B_t - \varphi(t))\right] < \infty$.

Admettons le lemme, et démontrons le théorème. $(*)$ entraîne évidemment (C_2).

On a : $\dfrac{\varphi^2(s)}{s} = (\log s)\,\Pi^2(s)$; donc, pour s suff^t grand, $u^2(s) \geq M$.

L'inégalité $\left(\dfrac{\varphi^2(s)}{s} \leq x^2\right)$ $(x>0$ fixé$)$ implique : $M(\log s) \leq x^2$,

i.e. : $s \leq e^{x^2/M}$. On a donc :

$$\int^\infty ds \int_{\left\{\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}} \leq x\right\}} e^{-x^2/2}\,dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx\; e^{x^2/M} < \infty,$$

pour $M > 2$.

La condition (C_1) est satisfaite. En ce qui concerne (C_3), on a :

$$d\varphi(s) = d\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{s}\right) = \frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}\,\frac{ds}{(2\sqrt{s})} + \sqrt{s}\; d\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}\right).$$

On a : $$\int^\infty \frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}\left(\frac{ds}{2\sqrt{s}}\right)\int_{\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}} \leq x\right)} e^{-x^2/2}\,dx \leq \int^\infty ds \int_{\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}} \leq x\right)} x\,e^{-x^2/2}\,dx < \infty$$

d'après les majorations précédentes.

D'autre part, en faisant le changement de variables $s = e^u$, et $h(u) = \Pi(e^u)$,

$$\int^{\infty} \sqrt{s}\, d\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}}\right) \int_{\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s}} \leq x\right)} e^{-x^2/2} dx = \int^{\infty} e^{u/2} d\left(\sqrt{u}\, h(u)\right) \int_{(u h^2(u) \leq x^2)} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \underbrace{\int^{\infty} e^{u/2} \sqrt{u}\, dh(u) \int_{u h^2(u) \leq x^2} e^{-x^2/2} dx}_{1} + \underbrace{\int^{\infty} e^{u/2} h(u) \frac{du}{2\sqrt{u}} \int_{u h^2(u) \leq x^2} e^{-x^2/2} dx}_{2}$$

$$1 \leq \int^{\infty} e^{u/2} dh(u) \int_{(u h^2(u) \leq x^2)} x e^{-x^2/2} dx$$

$$\leq \int^{\infty} dh(u) \int_{(u h^2(u) \leq x^2)} x e^{x^2/2M - x^2/2} dx$$

$$\leq \int^{\infty} x^2 e^{x^2/2M - x^2/2} dx < \infty$$; de même, $2 < \infty$.

<u>Démonstration du lemme:</u> Posons $X_t = B_t - \varphi(t)$.

On a, d'après la formule de Tanaka:

$$X_t^+ = \int_0^t 1_{(X_s > 0)} \left(dB_s - d\varphi(s)\right) + \frac{1}{2} L_t^0(X). \qquad (1)$$

D'où: $\sup_t X_t \leq \sup_t \left(\int_0^t 1_{(X_s>0)} dB_s\right) + \frac{1}{2} L_\infty^0(X)$.

$$E[\sup_t X_t] \leq c\, E\left[\left(\int_0^\infty 1_{(X_s > 0)} ds\right)^{1/2}\right] + \frac{1}{2} E[L_\infty^0(X)].$$

Si l'on revient à (1), on a:

$$\frac{1}{2} E(L_t^0(X)) = E(X_t^+) + \int_0^t d\varphi(s)\, P(X_s > 0).$$

On déduit de ces estimations que $E[\sup_t X_t] < \infty$ dès que:

(c_1') $\int^\infty dt\, P(X_t > 0) < \infty$

(c_2') $\sup_t E(X_t^+) < \infty$.

(c_3') $\int^\infty d\varphi(t)\, P(X_t > 0)$.

Or, $P(X_t > 0) = P\left(G - \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} > 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-x^2/2} dx$,

d'où les conditions (c_1) et (c_3).

Enfin, $E(X_t^+) = \sqrt{t}\, E\left(\left(G - \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}\right)^+\right)$

$$= \sqrt{t} \int_{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}}^{\infty} \left(x - \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}\right) e^{-x^2/2}\, dx$$

$$\leq \sqrt{t} \int_{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}}^{\infty} x\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{t}\cdot e^{-\frac{\varphi^2(t)}{2t}}.$$

La condition (C_2) entraîne donc (C_2').

<u>Reprise (31 janvier)</u> Le théorème 1 est à remplacer par le

<u>Théorème 1'</u> : Soit $\varphi_M(t) = (M\, t(\log t))^{1/2}$. $(t \geq 1)$

Alors, pour tout $M > 2$, on a : $E\left[\sup_{t\geq 1} (B_t - \varphi_M(t))\right] < \infty$

En conséquence, si $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est localement bornée, et satisfait pour t suffisamment grand : $\varphi(t) \geq \varphi_M(t)$ $(M > 2)$,

on a : $E\left[\sup_t (B_t - \varphi(t))\right] < \infty$.

<u>Démonstration</u> : L'application du lemme à φ_M donne immédiatement le le résultat.

<u>2. Question (6.1)</u>

(non nécessairement positive)

<u>Proposition</u> : Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ ~~sur~~martingale locale telle que $M_0 = 0$, et $\Delta M_s \geq 0$.

Alors, (1) $P\left\{\sup_t (M_t - [M]_t) \geq x\right\} \leq \exp(-2x)$.

En conséquence, on a, pour tout $\lambda > 0$:

(2) $E\left[\sup_t (M_t - \lambda [M]_t)\right] \leq \frac{1}{2\lambda}$,

et pour toute variable $L \geq 0$:

(3) $E[M_L] \leq \left(2 E([M]_L)\right)^{1/2}$.

<u>Démonstration</u> : (2) découle de (1) (changement de M en (λM)), et (3) découle de (2) (méthode de soustraction, puis addition).